Teoria da Regressão

$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

1) Mostre que

(a) $\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{X}^t = \mathbf{Q}\mathbf{X}\mathbf{X}^t \Rightarrow \mathbf{P}\mathbf{X} = \mathbf{Q}\mathbf{X}$

(b) $(1/n)\mathbf{J}$ é idempotente, onde $\mathbf{J} = \mathbf{1}\mathbf{1}^t$ é uma matriz quadrada de ordem n

(c) $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ ortogonais $\Rightarrow$ $\mathbf{PQ}$ e $\mathbf{QP}$ ortogonais

(d) $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t$ em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem n, $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \mathbf{P} \text{ é} & \text{simétrica e idempotente} \\ \mathbf{P}\mathbf{X} = \mathbf{0} & \text{e } \mathbf{X}^t\mathbf{P} = \mathbf{0} \\ \mathbf{P} = \mathbf{I} - (1/n)\mathbf{J} & \text{para } \mathbf{X} = \mathbf{1} \end{cases}$$

(e) $$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}^t & -\mathbf{D}\mathbf{E}^{-1} \\ -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}^t & \mathbf{E}^{-1} \end{pmatrix}$$

2.obter

(a) $\dfrac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}$ e $\dfrac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^T}$

(b) $\dfrac{tr(\mathbf{A}\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A}^T$

(c) $\dfrac{\partial \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}$ com $\mathbf{A}$ simétrica.

(d) $\dfrac{\partial |\mathbf{X}|}{\partial \mathbf{X}}$

(e) $\dfrac{\partial log|\mathbf{X}|}{\partial \mathbf{X}}$

3. Mostre que

(a) $\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ é p.d. $\forall \mathbf{A}$

(c) A única matriz idempotente e não singular é a matriz identidade.

(d) Se A_i, $i = 1, \ldots, n$ são matrizes p.d.'s então $\sum_{i=1}^n A_i$ também é p.d.

(g) $\mathbf{A}$ ortogonal $\Rightarrow |\mathbf{A}| = \pm 1$.

. Determine as matrizes **A**, **B**, **C** e **D** tais que

(a) $\mathbf{y}^t\mathbf{A}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} y_{ij}^2$

(b) $\mathbf{y}^t\mathbf{B}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \bar{y})^2$

(c) $\mathbf{y}^t\mathbf{C}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$

(d) $\mathbf{y}^t\mathbf{D}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} (\bar{y}_i - \bar{y})^2$

(e) As matrizes são todas positivas definidas ? Determine o posto de cada.

Os dados abaixo referem-se a meses de experiência de 10 digitadores e o número de erros cometidos na digitação de um determinado texto.

Mês(x)	1	2	3	4	6	7	8	9	10	10
erros (y)	30	28	24	20	18	14	13	10	7	6

(a) Represente graficamente esse conjunto de dados.

(b) assumindo que um modelo de regressão linear é adequado, determine os coeficientes da equação pelo método de mínimos quadrados.

(c) Represente a reta de regressão no gráfico feito.

(d) Qual o número esperado de erros para um digitador com 5 meses de experiência.

. 5.Os dados abaixo representam o faturamento mensal(em milhares de reais) de duas filiais da empresa A. Os dados dos três últimos meses da filial um estão incompletos.

Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Filial 1	80	90	85	125	130	150	165	185	160			
Filial 2	100	120	110	140	150	180	200	220	180	240	260	300

(a) Proponha um estimador pontual e por intervalo para o faturamento do mês de dezembro da filial 1 levando em conta o faturamento da filial 2. Que suposições você fez ? Elas são necessárias ?

(b) Efetue um análise completa do problema apresentado

. 6. Considere o modelo de regressão linear simples $y_i = 50 + 10x_i + \epsilon_i$, where $\epsilon \sim N(0, 16)$, $i = 1, \ldots, 20$. Gere 500 amostras de 20 observações para cada nível de $x = 1, 1.5, 2, \ldots, 10$.

(a) Para cada amostra calcule os estomativa de mínimos quadrados dos parâmetros. Construa histogramas dos valores amostras de $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$.

(b) Para cada amostra, calcule a estimativa de $E(y \mid x = 5)$. Construa o histograma das estimativas obtidas. Discuta a forma do histograma.

(c) Para cada amostra, calcule o intervalo de confiança de 95% . Quantos desses intervalos contêm o verdadeiro valor de β_1 ? Isto é o que você esperava ?

(d) Para cada estimativa de $E(y \mid x = 5)$ em (b). calcule o intervalo de confiança de 90% Quantos desses intervalos contêm o verdadeiro valor de $E(y \mid x = 5) = 100$? Isto é o que você esperava ?.