



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

CÉSAR DIOGO BEZERRA DA SILVA

NOVOS PARADIGMAS PARA O PROCESSO DE STAVSKAYA

Recife

2022

CÉSAR DIOGO BEZERRA DA SILVA

NOVOS PARADIGMAS PARA O PROCESSO DE STAVSKAYA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Estatística. Área de Concentração: Probabilidade

Orientador: Prof. Dr. Alex Dias Ramos

Recife

2022



# **CÉSAR DIOGO BEZERRA DA SILVA**

## **Novos Paradigmas para o Processo de Stavskaya**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Estatística.

Aprovada em: 21 de fevereiro de 2022.

### **BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Alex Dias Ramos  
UFPE

Prof. Dr. Pablo Martin Rodriguez  
UFPE

Prof. Dr. Getúlio José Amorim do Amaral  
UFPE

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Maria Eulália Vares  
UFRJ

Prof. Dr. Fábio Prates Machado  
USP

Aos meus pais, Paulo Manoel e Marinalva Bezerra, ao meu irmão, Carlos Diego, a minha cunhada, Iliana Mendes, aos meus sobrinhos, Débora Lais e Andrew Rayner e a minha avó, Amara Bezerra, in memoriam.

## AGRADECIMENTOS

Quando, enfim, chegou o momento de escrever meus agradecimentos pela conclusão desta etapa tão importante em minha vida, é impossível não estar emocionado enquanto penso em alguns nomes e instituições que constituem a história que me traz até aqui.

Agradeço primeiramente a Deus, pela oportunidade de estar no Programa de Pós-graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco - PPGE, onde eu sempre quis estar, e por ter me dado força em momentos que muito precisei.

Aos meus pais, Paulo Manoel e Marinalva Bezerra, que são meus principais incentivadores em tudo o que faço. Minha mãe, que me ensinou a ler, antes mesmo de ter idade para frequentar a escola. Meu pai, que me deu o maior exemplo de educação moral que uma pessoa pode ter. Ao meu irmão, Carlos Diego, a minha cunhada, Iliana Mendes, aos meus sobrinhos, Débora e Andrew e a minha avó, Amara Bezerra, in memoriam, pelo amor, força e incentivo aos meus estudos. Em adição, agradeço aos demais familiares que apoiaram cada etapa da minha trajetória acadêmica até aqui.

Neste momento eu posso até tentar ser breve em minhas palavras, mas preciso deixar clara e registrada a minha gratidão, admiração e felicidade em ter trabalhado com o meu orientador, o Prof. Dr. Alex Ramos. Pelo exemplo de profissional que ele é, pela humanidade com a qual sempre me tratou, ajudando em meu potencial, pelo comprometimento com nossas pesquisas e pelo incentivo às atividades que podem surgir após a conclusão do meu doutorado, minha eterna gratidão. Se um dia eu me tornar 10% do que ele representa para mim, serei um dos profissionais mais realizados na minha área.

Aos muitos amigos que trouxe e fiz no programa, nos momentos de estudo coletivo ou momentos fora da universidade, minha gratidão, pela força e torcida, a Jessica Barbosa, Alex Santos, Danilo Pontual, Risomário Willams, Marcos Aurélio, Flavia Bezerra, Hugo Deleon, Ana Cristina, Maria Ioneris, Fidel Fernandes, Vinícius Scher, Jucelino Matos, Anabeth Radunz, Bruna Palm, Eduardo Ensslin, Luan Portela, Adenice Ferreira, Diogo Vasconselos, Cristine Rauber, Anny Kerollayny, José Jairo, Tatiane Ribeiro, João Eudes, Fernanda Clotilde, Pedro Almeida, Jodavid Ferreira, Saul Souza, Jonas Weverson, Marcelo

Santos, José Iraponil, Alexsandro Ferreira, Thalytta Cavalcante, Alexsandra Lima, Rodolpho Jordan, Larissa Lima, Ranah Duarte, André Medeiros, Luiz Felix, Luciano Mendes e aos demais colegas que com quem convivi no programa.

Agradeço aos Professores do PPGE, em especial aos que conheci nas disciplinas cursadas, nos seminários de Pós-graduação e na coordenação do curso. São eles: Prof. Dr. Alex Ramos, Prof. Dr. Klaus Vasconcellos, Prof<sup>a</sup>. Dra. Patrícia Ospina, Prof. Dr. Pablo Rodriguez, Prof. Dr. Getúlio Amaral, Profa. Dra. Audrey Cysneiros, Prof<sup>a</sup>. Dra. Maria do Carmo, Prof. Dr. Raydonal Ospina, Prof. Dr. Aldo Garay, Prof. Dr. Francisco Cribari e Prof. Dr. Gauss Cordeiro.

Aos membros da banca examinadora pela atenção e contribuições que enriquecem esta pesquisa.

Aos professores da minha graduação que contribuíram direta ou indiretamente para o meu interesse na Pós-graduação. São eles: Prof. Dr. Ivanildo Carvalho, Prof<sup>a</sup>. Dra. Cristiane Rocha, Prof<sup>a</sup>. Dra. Andrea Santos, Prof. Dr. Ricardo Nunes, Prof<sup>a</sup>. Ma. Elizabeth Lacerda, Prof. Me. José Marcos.

Aos servidores da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, principalmente à Valéria Bittencourt (secretária aposentada durante o curso) e à Michelle Quemel, pela ajuda e prestatividade com as questões documentais do programa.

A UFPE, pelo ensino de qualidade como suporte para esta pesquisa e onde estudo nos últimos 11 anos.

Ao apoio financeiro fornecido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, que permitiu dedicação exclusiva às atividades.

A todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

## RESUMO

O processo de Stavskaya, o qual denotaremos **Stav** por simplicidade, é uma versão a tempo discreto do conhecido processo de contato. Neste trabalho, revisitamos o processo de Stavskaya com comprimento variável, um sistema de partículas interagentes unidimensional que difere dos tradicionalmente estudados. Nele, as partículas podem aparecer ou desaparecer durante a evolução do sistema. Neste sistema, cada partícula assume estado mais ou menos e evolui da seguinte forma: entre duas partículas vizinhas, nasce uma partícula no estado mais com probabilidade  $\beta$ , independente do que ocorre nos outros lugares. Sempre que uma partícula no estado mais é a vizinha mais próxima à direita de uma partícula no estado menos, então este mais desaparece com probabilidade  $\alpha$ . Diferente de **Stav**, foi mostrado que esta versão variável não apresenta o mesmo tipo de transição de fase. Mais especificamente, o processo variável sempre converge para a mesma delta medida (ergódico), independente dos parâmetros fixados. Em nosso estudo, estabelecemos e analisamos a existência de um outro tipo de transição de fase, além de termos explorado outros aspectos da sua dinâmica. No processo de Stavskaya clássico, em cada passo de tempo, dois operadores atuam: o primeiro determinístico,  $D$ , seguido por um aleatório. Tomamos um processo de difusão, descrito por uma equação diferencial parcial. Mostramos que sua equação de diferença finita, a qual denotamos por **Difus**, é levada via ultradiscretização em  $D$ . Motivados por essa correspondência, definimos o processo de Stavskaya de difusão, denotada **PSD** por simplicidade. Assim como o **Stav**, o **PSD** evolui em tempo discreto, da seguinte forma: Em cada passo de tempo discreto, dois operadores atuam, primeiro **Difus** seguido de um outro aleatório,  $A_\alpha$ . Diferente de **Stav**, cada partícula do **PSD** assume valor num conjunto não enumerável. Mais especificamente, ele atua no conjunto de medidas de probabilidade em  $[1, \infty)^{\mathbb{Z}}$ . Verificamos se o processo **PSD** e **Stav** são qualitativamente equivalentes, por exemplo, se há uma transição de fase e se propriedades, como: monotonicidade e linearidade são mantidas. Em adição, desenvolvemos, para o processo de Stavskaya e para o **PSD**, alguns estudos numéricos.

**Palavras-chaves:** processo de Stavskaya; ergodicidade; processo aleatórios, equação de diferença parcial estocástica.

## ABSTRACT

The Stavskaya process, which we denote  $\mathbf{Stav}$ , is a discrete-time version of the well known contact process. In this work we revisit the Stavskaya process with variable length. It is an unidimensional interacting particle system, which is different from the traditionally studied. In this, the particles may appear or disappear during the evolution of the system. Here, each particle takes state minus or plus and evolves like follows: birth a new particle between every two neighboring particles with probability  $\beta$ , independently from what happens at other places. After that, whenever a plus is a left neighbor of a minus, then this plus disappears with probability  $\alpha$ . It was shown that in this variable version there is not the same phase transition as in  $\mathbf{Stav}$ . More specifically, the variable process always converges to the same delta measure (ergodic), independently of the parameters fixed. In our study, we establish and analyze the existence of another kind of phase transition besides we have explored other aspects in its dynamic. At each time-step in the classical Stavskaya process, two operators act: the first is deterministic,  $\mathbf{D}$ , followed by a random operator. We take a diffusion process, which is described by a partial differential equation. We show that its finite difference equation, which we denote by  $\mathbf{Difus}$ , is transformed by ultra discretization into  $\mathbf{D}$ . Motivated by this correspondence, we defined the diffusive Stavskaya process, which we denote  $\mathbf{PSD}$  by simplicity. Like the Stavskaya process, the  $\mathbf{PSD}$  evolves in discrete time by the following way: in each discrete time-step, two operators act: first  $\mathbf{Difus}$  followed by another random operator. Different from the Stavskaya process, each particle takes values in a non-enumerable set. More specifically, the  $\mathbf{PSD}$  acts in the set of the measures of probabilities in  $[1, \infty)^{\mathbb{Z}}$ . We verify if the  $\mathbf{PSD}$  and the Stavskaya process are qualitatively similar, for example, if there is phase transition and if properties like monotonicity and linearity are preserved. In addition, we make some numerical studies for the Stavskaya Process and for the  $\mathbf{PSD}$ .

**Keywords:** Stavskaya process; ergodicity random processes; stochastic partial differential equations.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – <i>Ilustração de um fragmento de uma configuração após ação do operador Stav.</i> . . . . .	19
Figura 2 – <i>Evolução do fragmento do processo. Observamos o que ocorre entre as componentes <math>s_i</math> e <math>s_j</math> e os valores para <math>Z_t^{ij}</math> associados a cada tempo.</i> . . . . .	27
Figura 3 – <i>Diagrama de transição do processo <math>Z</math>.</i> . . . . .	30
Figura 4 – <i>Representação em árvore do processo <math>Z</math>.</i> . . . . .	31
Figura 5 – <i>Distribuição empírica da variável aleatória <math>X_{300}</math> para duas amostras de tamanho 1000, onde <math>X_0 = 0</math>. Em (a) consideramos <math>\beta = 0.01</math> e em (b) consideramos <math>\beta = 0.05</math>.</i> . . . . .	41
Figura 6 – <i>Diagrama de transição do processo <math>L^1</math>.</i> . . . . .	48
Figura 7 – <i>Ilustração de uma possível realização em um acoplamento entre os processos <math>L^1</math> e <math>Z</math>, considerando <math>L_0^1 = Z_0 = 1</math>.</i> . . . . .	51
Figura 8 – <i>Associação dos processos <math>Z^{i^{i+1}}</math> em um fragmento da configuração todas menos.</i> . . . . .	54
Figura 9 – <i>Diagrama de transição do processo <math>Z</math> considerando <math>\alpha = 1</math> e <math>\beta \in (0, 1)</math>.</i> . . . . .	59
Figura 10 – <i>Diagramas de transição do processo <math>Z^N</math> com <math>N \in \{1, 2, 3, 4\}</math>.</i> . . . . .	70
Figura 11 – <i>Diagrama de transição do processo <math>Z</math>.</i> . . . . .	70
Figura 12 – <i>Diagrama de transição do processo <math>L^3</math>.</i> . . . . .	72
Figura 13 – <i>Regiões formadas pelos pares <math>(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2</math> para as quais <math>\mathbb{E}_0(\tau_N)</math> apresenta transição de fase.</i> . . . . .	76
Figura 14 – <i>Estimativas dos tempos alcance, <math>t_1^{min}, \bar{t}_1, t_1^{max}</math> respectivamente, e seus respectivos valores esperados reais, <math>\mathbb{E}(T_1^{min}), \mathbb{E}(T_1)</math> e <math>\mathbb{E}(T_1^{max})</math>.</i> . . . . .	82
Figura 15 – <i>Estimativas de <math>\mathbb{E}_0(T_N)</math> com <math>Z_0 = 0</math>, <math>\beta = 0.05</math> e <math>N \in \{2, 3, 4\}</math>.</i> . . . . .	83
Figura 16 – <i>Estimativas de <math>\mathbb{E}_0(T_N)</math> com <math>N \in \{1, 2, \dots, 1000\}</math> e <math>(\alpha, \beta) = (0.01, 0.99)</math>.</i> . . . . .	84
Figura 17 – <i>Esquema da obtenção de um autômato celular binário a partir de uma equação diferencial parcial.</i> . . . . .	86

Figura 18 – <i>Ilustração da ação do operador determinístico do processo PSD, onde <math>u_7^0 = M</math> e <math>u_j^0 = 1</math> para <math>j \neq 7</math>.</i> . . . . .	95
Figura 19 – <i>Ilustração do conjunto <math>\Delta_{(-1,4)}</math> no modelo de percolação orientada construído para o PSD.</i> . . . . .	98
Figura 20 – <i>Ilustrações dos processos Stav e StavD com <math>\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}</math>. Consideramos em cada ilustração um sistema com <math>n = 100</math> e <math>T = 100</math>. As Figuras (a), (d), (g) e (j) correspondem a ilustrações do processo Stav, onde <math>s_i^0 = 1</math> para todo <math>i \in \{1, \dots, 100\}</math>; as Figuras (b), (e), (h) e (k) correspondem a ilustrações do processo StavD, onde <math>\epsilon = 1/\ln(1,000,000)</math>, para todo <math>i \in \{1, \dots, 100\}</math>; as Figuras (c), (f), (i) e (l) correspondem a ilustrações do processo StavD, onde <math>\epsilon = 1/\ln(10,000)</math>, para todo <math>i \in \{1, \dots, 100\}</math>. Nas ilustrações, o quadrado preto na coordenada <math>\{i, t\}</math> indica a componente <math>s_i^t = 1</math> no processo de stavskaya (respectivamente <math>u_i^t &gt; 1</math> no StavD) e o quadrado branco indica <math>s_i^t = 0</math> no processo de Stavskaya (respectivamente <math>u_i^t = 1</math> no StavD).</i> . . . . .	108

## LISTA DE SIGLAS

$\mathbb{Z}$	CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS
$\{\oplus, \ominus\}^{\mathbb{Z}}$	CONJUNTO DAS SEQUÊNCIAS BI-INFINITAS CUJOS TERMOS PERTENCEM A $\{\ominus, \oplus\}$
$\wedge$	PALAVRA VAZIA
$\text{dic}(\{\oplus, \ominus\})$	DICIONÁRIO
$\mathcal{M}$	CONJUNTO DAS MEDIDAS DE PROBABILIDADE EM $\{\oplus, \ominus\}^{\mathbb{Z}}$
$\mathcal{M}_U$	CONJUNTO DAS MEDIDAS UNIFORMES EM $\{\oplus, \ominus\}^{\mathbb{Z}}$
$\mathbb{P}$	MEDIDA DE PROBABILIDADE
$\mathbb{P}_i$	MEDIDA DE PROBABILIDADE PARA UMA CADEIA DE MARKOV CONDICIONADA QUE A CADEIA TEVE INÍCIO NO ESTADO $i$
$\delta_s$	MEDIDA CONCENTRADA NA CONFIGURAÇÃO $s$
$\mathbf{N}_\beta$	OPERADOR NASCIMENTO
$\tilde{\mathbf{N}}_\beta$	OPERADOR NASCIMENTO PARA PALAVRAS ALEATÓRIAS
$\mathbf{M}_\alpha$	OPERADOR MORTE
$\tilde{\mathbf{M}}_\alpha$	OPERADOR MORTE PARA PALAVRAS ALEATÓRIAS
$\mathbf{VS}$	OPERADOR STAVSKAYA COM COMPRIMENTO VARIÁVEL
$\tilde{\mathbf{VS}}$	OPERADOR STAVSKAYA COM COMPRIMENTO VARIÁVEL PARA PALAVRAS ALEATÓRIAS
$\mathbb{N}$	CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS
$\mathbb{Z}_+$	CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS NÃO NEGATIVOS
$\mathbb{R}_+$	CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS NÃO NEGATIVOS
$\mathbb{E}(X)$	VALOR ESPERADO DA VARIÁVEL ALEATÓRIA $X$
$\mathbb{E}_i(X)$	VALOR ESPERADO PARA UMA CADEIA DE MARKOV CONDICIONADA QUE A CADEIA INICIOU NO ESTADO $i$
$\mathbb{I}(\cdot)$	FUNÇÃO INDICADORA
$\mathbb{E}(X \mathcal{F})$	ESPERANÇA CONDICIONAL DA VARIÁVEL ALEATÓRIA $X$ DADA A $\sigma$ -ÁLGEBRA $\mathcal{F}$
$\text{qv}(W)$	QUANTIDADE DE POSIÇÕES QUE A PALAVRA $W$ ENTRA $V$
$\text{d}_V(W)$	DENSIDADE DAS QUANTIDADES DAS POSIÇÕES QUE $W$

	ENTRA $V$
$\text{restrict}(\mu _{s_{i_1}, \dots, s_{i_n}})$	RESTRIÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO $\mu$ ÀS COMPONENTES $s_{i_1}, \dots, s_{i_n}$
Stav	OPERADOR DE STAVSKAYA COM COMPRIMENTO FIXO
$D^k$	CONJUNTO DE TODAS AS DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM $k$ DE UMA DADA FUNÇÃO
Difus	OPERADOR DETERMINÍSTICO DO PSD
StavD	OPERADOR DE STAVSKAYA DE DIFUSÃO
$u$	ILHA, ONDE APENAS UM NÚMERO FINITO DE COMPONENTES ASSUME VALOR MAIOR QUE 1
$\bar{u}$	MAJORANTE DA ILHA $u$
$\mathcal{N}$	CONJUNTO DAS MEDIDAS NORMALIZADAS EM $[1, \infty)^{\mathbb{Z}}$
$\mu$ -ilha	MEDIDA $\mu \in \mathcal{N}$ , ONDE EXISTE $M$ TAL QUE $\mu(u_k^t \in [1, M]) = 1$
$\mathcal{I}$	CONJUNTO DAS $\mu$ -ILHAS

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>15</b>
1.1	O PROCESSO DE STAVSKAYA . . . . .	16
1.2	ORGANIZAÇÃO DO NOSSO TRABALHO . . . . .	19
<b>2</b>	<b>PROCESSO DE STAVSKAYA COM COMPRIMENTO VA- RIÁVEL: NOVOS <i>INSIGHTS</i> . . . . .</b>	<b>22</b>
2.1	DEFINIÇÕES . . . . .	22
2.1.1	Palavras Aleatórias e Convergência . . . . .	23
2.1.2	Não linearidade de Processos de Partículas com Comprimento Variável . . . . .	24
2.1.3	Operador de Stavskaya com Comprimento Variável . . . . .	25
2.2	PRINCIPAIS RESULTADOS . . . . .	26
2.3	UMA REPRESENTAÇÃO EM $\mathbb{Z}_+$ DO PROCESSO VS . . . . .	28
2.4	O PROCESSO $Z$ COM $\alpha = 0$ . . . . .	31
2.4.1	Primeiro e segundo momentos de $Z_t$ quando $\alpha = 0$ . . . . .	32
2.5	MONOTONICIDADE DE $N_\beta$ . . . . .	42
2.6	PROVA DO TEOREMA 2.2.1 . . . . .	46
2.7	PROVA DO TEOREMA 2.2.2 . . . . .	48
2.7.1	Sobre Medidas Uniformes . . . . .	52
2.7.2	Alguns Resultados Limites para Palavras Aleatórias . . . . .	53
2.8	PROVA DO TEOREMA 2.2.3 . . . . .	58
2.8.1	O operador VS em algumas $\delta$ -medidas . . . . .	60
2.8.2	O Operador VS em Medidas Uniformes . . . . .	65
2.9	PROVA DO TEOREMA 2.2.4 . . . . .	69
2.9.1	O Processo $L^3$ . . . . .	72
2.10	ESTUDO NUMÉRICO . . . . .	76
2.10.1	Verificando a Implementação . . . . .	80
2.10.2	Análise do Processo $Z$ . . . . .	80
<b>3</b>	<b>O PROCESSO DE STAVSKAYA DE DIFUSÃO . . . . .</b>	<b>85</b>
3.1	EQUAÇÃO DE ONDA LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM . . . . .	85
3.2	DA EQUAÇÃO DE ONDA AO OPERADOR $D$ . . . . .	86
3.3	UM PROCESSO DE STAVSKAYA DE DIFUSÃO . . . . .	90

3.3.1	A propriedade da erosão . . . . .	92
3.3.2	Ergodicidade no PSD . . . . .	96
3.3.2.1	O PSD Como um Processo de Percolação . . . . .	97
3.4	ESTUDO NUMÉRICO . . . . .	101
3.5	MODELAGEM COMPUTACIONAL DOS PROCESSOS Stav E StavD	104
4	CONCLUSÕES . . . . .	109
	REFERÊNCIAS . . . . .	111
	APÊNDICE A - SOBRE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS . .	115
	APÊNDICE B - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA LI- NEAR DE 1ª ORDEM UNIDIMENSIONAL . . . . .	120
	APÊNDICE C - MONOTONICIDADE EM AUTÔMATOS CELULARES PROBABILÍSTICOS . . . . .	121

## 1 INTRODUÇÃO

A teoria dos Sistemas de Partículas Interagentes, SPI por simplicidade, surgiu no final dos anos 1960 como um ramo da teoria das probabilidades e, desde então, tem contribuído na compreensão de fenômenos que ocorrem em outras áreas [1] tais como biologia, economia e ciências sociais, os quais forneceram modelos eficazes de SPI [2].

Estudos teóricos envolvendo SPI frequentemente tem como foco a ergodicidade [3], ou seja, se há uma medida invariante e, havendo tal medida, se dada qualquer medida inicial o processo converge para ela. Outra análise comum é na classificação da medida invariante (Gibbs, quasi Gibbs, queda de correlação).

O processo de Stavskaya, ou processo de Stavskaya com comprimento fixo, é um processo de percolação [4], o qual foi proposto na segunda metade do século XX, ao menos pelo que sabemos, o processo de Stavskaya foi o primeiro sistema de partículas interagentes simulado computacionalmente. Ele é uma versão discreta do bem conhecido processo de contato [1, 5, 6] e contribuiu para o desenvolvimento da teoria dos sistemas de partículas interagentes. Ele é resultante de pequenas perturbações aleatórias, ou ruídos, em autômatos celulares determinísticos [7, 8].

Trata-se de um autômato celular probabilístico, ACP por simplicidade, onde as componentes no sistema são descritas em uma rede unidimensional,  $\mathbb{Z}$ , e cada componente assume dois possíveis estados, a saber: 0 ou 1. Em cada passo de tempo, o processo de Stavskaya é atualizado em duas metades do passo: na primeira metade do passo, uma componente assume o estado 1 se ela ou sua vizinha mais próxima à direita estão no estado 1. Na segunda metade do passo, cada componente no estado 1 assume o estado 0 com probabilidade  $\alpha$ , independente do que ocorre nos demais locais ou permanece no seu estado com probabilidade  $1 - \alpha$ .

Em [9], Toom descreveu condições para as quais um autômato celular binário monótono possui a propriedade da erosão, no sentido que se apenas um conjunto finito das componentes está inicialmente no estado 1, então existe um tempo finito  $t$  para o qual todas as componentes no sistema estarão no estado 0 [7, 8]. Desta forma, a medida concentrada na configuração em que todas as componentes são zeros é dita ser um atrator para a trajetória do autômato celular. Em [10] foram descritas condições para as quais um autômato celular probabilístico possui a propriedade da erosão. Se o sistema contém inicialmente um número finito de componentes no estado 1, então a propriedade da erosão

para autômatos celulares probabilísticos é observada a partir do tempo médio que o processo alcança pela primeira vez um sistema com todas as componentes no estado zero.

Este processo foi um dos primeiros para o qual foi mostrada, rigorosamente, a existência de um tipo de transição de fase [3, 4, 11, 12]. A transição de fase no modelo de Stavskaya se dá no sentido que a variação contínua no ruído leva a uma mudança qualitativa no comportamento do processo. Em [4, 12], Toom mostrou que o valor crítico,  $\alpha_c$ , para o qual a transição de fase ocorre pertence ao intervalo  $(0.09, 0.323)$ . Em [3], foi obtido que  $\alpha_c > 0.11$ , o que melhora o limitante inferior para o intervalo que contém  $\alpha_c$ . Mendonça estimou em [13] que este valor crítico é  $\alpha_c = 0.29450(5)$ . Em adição, quando o ruído considerado no modelo é alto, então a medida  $\delta_0$ , concentrada em um sistema com todas as componentes no estado 0, é uma medida invariante. Foi mostrada em [14] a existência de um  $\alpha_c > 0$  tal que para todo  $\alpha < \alpha_c$ , o processo admite outra medida invariante,  $\mu_{inv}$ . Com base na existência deste  $\alpha_c$  e na existência das medidas invariantes  $\delta_0$  e  $\mu_{inv}$ , se  $\alpha < \alpha_c$ , todas as medidas invariantes que são homogêneas no espaço são combinações convexas destas duas medidas. Por outro lado, desde que  $\alpha > \alpha_c$ , então o processo converge para a medida  $\delta_1$ , qualquer que seja a medida inicial. Além disso, quando o parâmetro  $\alpha$  do modelo é pequeno, então a medida invariante é fracamente Gibbs no sentido de que existe um potencial de interação em declínio exponencial para um conjunto completo de medidas de configuração [8, 15].

Em grande parte das pesquisas teóricas sobre os sistemas de partículas interagentes, o conjunto das componentes no sistema não muda no processo de interação [16, 17]. No entanto, alguns estudos evidenciam sistemas de componentes, os quais podem sofrer transformações aleatórias como a inserção e exclusão de componentes no sistema [18, 19, 20, 21, 22]. Neste caso, chamamos de Sistemas de Partículas Interagentes com Comprimento Variável.

## 1.1 O PROCESSO DE STAVSKAYA

Nós faremos uma introdução formal para o processo de Stavskaya [3, 11, 12]. Tomamos o conjunto  $\{0, 1\}$ , o qual chamamos *alfabeto*. Nosso espaço de configurações é o conjunto  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Uma *configuração*  $s \in \Omega$  é determinada pelas componentes  $s_i \in \{0, 1\}$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$ . Chamamos *cilindro fino* a um conjunto da forma

$$C = \{s \in \Omega : s_i = a_i \text{ para } i \in [m, n]\},$$

onde  $a_i \in \{0, 1\}$ . Denotamos por  $\mathcal{M}$  o conjunto das medidas de probabilidade na  $\sigma$ -álgebra gerada pelos cilindros em  $\Omega$ . Denotamos por  $\delta_0$  e  $\delta_1$  as medidas concentradas nas configurações cujas componentes estão todas no estado zero ou todas as componentes estão no estado um, respectivamente. Dada uma configuração  $s \in \Omega$ , denotamos a medida concentrada em  $s$  por  $\delta_s$ .

Definimos o operador de Stavskaya,  $\text{Stav}\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , pela composição de dois operadores, sendo o primeiro determinístico, denotado por  $D : \Omega \rightarrow \Omega$  e o segundo aleatório, denotado por  $R_\alpha$ , com  $\alpha \in [0, 1]$ . Assim

$$\text{Stav} = D \circ R_\alpha.$$

Por razões tipográficas, omitimos o símbolo  $\circ$ , escrevendo  $\text{Stav} = DR_\alpha$ , primeiro atua  $D$  e depois  $R_\alpha$ , nesta ordem. A ação do operador  $\text{Stav}$  ocorre da seguinte forma: sob a ação do operador  $D$ , uma configuração  $s \in \Omega$  se transforma na configuração  $sD$  tal que  $(sD)_i = \max\{s_i, s_{i+1}\}$ , para cada  $i \in \mathbb{Z}$ . Em seguida o operador  $R_\alpha$  transforma cada 1 em 0 com probabilidade  $\alpha$ , independente do que ocorre com as demais componentes.

Para todo  $i \in \mathbb{Z}$  existe um conjunto finito  $V(i) \subset \mathbb{Z}$ , o qual chamaremos de *bairro*, cujos elementos de  $V(i)$  são chamados *vizinhos* de  $i$ . Para qualquer conjunto  $I \subset \mathbb{Z}$ , nós denotamos seu bairro por  $V(I) = \bigcup_{i \in I} V(i)$ .

Definiremos agora um autômato celular probabilístico a partir de um operador  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ . Uma medida em um espaço produto é dita ser uma *medida produto*, se todas as suas marginais são independentes uma das outras. Para uma  $\delta$ -medida,  $\delta_s$ , denotaremos por  $\theta_i(\cdot | s_{V(i)})$  a *probabilidade de transição* da  $i$ -ésima componente de acordo com a medida produto  $\delta_s P$ . O valor  $\theta_i(y | s_{V(i)})$  representa a probabilidade condicional que após a aplicação do operador  $P$  a  $i$ -ésima componente está no estado  $y$  se antes da aplicação de  $P$  a vizinhança de  $i$  estava no estado  $s_{V(i)}$ . Assim, definimos a ação de  $P$  em  $\delta$ -medidas.

Para  $\mu \in \mathcal{M}$ , podemos escrever  $\mu P$  em um cilindro fino,  $C$ , restringido  $\mu$  a  $V(I)$ . Daí

$$\mu P(s_i = b_i : i \in I) = \sum_{a_i : i \in V(I)} \mu(s_i = a_i, i \in V(I)) \prod_{i \in I} \theta_i(b_i | s_{V(i)}), \quad (1.1)$$

onde  $I \subset \mathbb{Z}$  finito e  $\sum_{b_i} \theta_i(b_i | s_{V(i)}) = 1$ , com  $b_i$  pertencente a  $\{0, 1\}$ .

É comum nas definições de ACP, que o operador que o descreve seja linear. Neste sentido,  $\mathbf{P}$  é linear se

$$(\lambda\mu + (1 - \lambda)\nu)\mathbf{P} = \lambda\mu\mathbf{P} + (1 - \lambda)\nu\mathbf{P},$$

onde  $\mu, \nu \in \mathcal{M}$  e  $\lambda \in [0, 1]$ .

**Lema 1.1.1.** *O operador  $\mathbf{P}$  é linear.*

**Prova:** Tomando  $\mu, \nu \in \mathcal{M}$  e  $\lambda \in [0, 1]$ , temos

$$\begin{aligned} (\lambda\mu + (1 - \lambda)\nu)\mathbf{P}(s_i = b_i : i \in I) &= \sum_{a_i: i \in V(I)} (\lambda\mu + (1 - \lambda)\nu)(s_i = a_i, i \in V(I)) \prod_{i \in I} \theta_i(b_i | s_{V(i)}) \\ &= \sum_{a_i: i \in V(I)} \lambda\mu(s_i = a_i, i \in V(I)) \prod_{i \in I} \theta_i(b_i | s_{V(i)}) \\ &\quad + \sum_{a_i: i \in V(I)} (1 - \lambda)\nu(s_i = a_i, i \in V(I)) \prod_{i \in I} \theta_i(b_i | s_{V(i)}) \\ &= \lambda\mu\mathbf{P}(s_i = b_i : i \in I) + (1 - \lambda)\nu\mathbf{P}(s_i = b_i : i \in I). \end{aligned}$$

■

O processo de Stavskaya é um modelo de ACP unidimensional, cujas componentes assumem coordenadas espaciais em  $\mathbb{Z}$ . Para  $i \in \mathbb{Z}$ , definimos  $V(i) = \{i, i + 1\}$ , a vizinhança da componente na posição  $i$  e consideramos  $\theta_i(b_i | s_{V(i)}) = \theta_i(b_i | s_i, s_{i+1}) = \theta(b_i | s_i, s_{i+1}) \in \{0, 1\}$ .

Desta forma, temos que as probabilidades de transição do operador  $\mathbf{Stav}$  são

$$\theta(1 | s_i, s_{i+1}) = \begin{cases} 0, & \text{se } s_i = s_{i+1} = 0; \\ 1 - \alpha, & \text{nos outros casos,} \end{cases} \quad (1.2)$$

onde  $\theta(0 | s_i, s_{i+1}) + \theta(1 | s_i, s_{i+1}) = 1$ . Pelo Lema 1.1.1, o operador  $\mathbf{Stav}$  é linear.

Para uma dada medida  $\mu \in \mathcal{M}$ , a notação  $\mu\mathbf{Stav}^t$  significa o resultado de  $t$  aplicações do operador  $\mathbf{Stav}$  sobre a medida  $\mu$ . Note que  $\delta_0$  é invariante para o processo  $\mathbf{Stav}$ .

A Figura 1 ilustra o fragmento de uma configuração após a ação do operador  $\mathbf{Stav}$ . Na transição do tempo  $t = 0$  para  $t = 1$ , pela definição do operador  $\mathbf{D}$ , as componentes  $s_3, s_4, s_5$  e  $s_6$  assumem o estado 1. Em seguida, a componente  $s_5$  se torna 0 sob ação do operador  $\mathbf{R}_\alpha$ , o que ocorre com probabilidade  $\alpha$ .

Para este processo foi mostrada a existência de um tipo de transição de fase [12], a qual foi melhorada (50 anos depois) em [3]. A variação contínua do parâmetro  $\alpha$  afeta

Figura 1 – *Ilustração de um fragmento de uma configuração após ação do operador Stav.*

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 t = 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \delta_s DR_\alpha \\
 & & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \delta_s D \\
 t = 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \delta_s \\
 & & \bullet & & & \\
 & & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 & & & 
 \end{array}$$

Fonte: Autoria Própria.

qualitativamente o comportamento do processo de Stavskaya. Em [4, 12] foi mostrado que existe  $0.09 < \alpha_c < 0.323$  tal que se  $\alpha > \alpha_c$ , o processo é ergódico e, neste caso, para qualquer medida inicial, o processo converge para a medida  $\delta_0$ . Por outro lado, se  $\alpha < \alpha_c$  então o processo admite outra medida invariante,  $\mu_{inv}$  [14]. Como  $\delta_0$  é também invariante e **Stav** é linear, então com  $\alpha < \alpha_c$ , qualquer medida invariante no espaço é uma combinação convexa de  $\delta_0$  e  $\mu_{inv}$ . Em adição, de [3] é possível escrever  $\alpha_c \in (0.11, 0.323)$ .

Se tomarmos uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas,  $(X_i^t)_{\{i,t\} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+}$  onde  $X_i^t$  tem distribuição Bernoulli com parâmetro  $1 - \alpha$ , seremos capazes de escrever o processo de Stavskaya da seguinte forma

$$S_i^{t+1} = X_i^t \max\{S_i^t, S_{i+1}^t\} \quad (1.3)$$

com  $S_i^t \in \{0, 1\}$ .

Essa apresentação, embora não convencional para autômatos celulares probabilísticos, é bastante natural quando tomamos  $S^0, S^1, S^2, \dots$  uma sequência de configurações aleatórias com respectivas distribuições  $\mu, \mu\text{Stav}, \mu\text{Stav}^2, \dots$ , onde  $S^0$  tem distribuição  $\mu$ . Uma descrição formal desta apresentação pode ser encontrada em [23].

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO NOSSO TRABALHO

Nosso trabalho está dividido em 4 capítulos, sendo esta introdução o primeiro deles. Os outros dois capítulos contêm as nossas pesquisas.

No capítulo 2, nós estudamos o processo de Stavskaya com Comprimento Variável, um SPI também unidimensional, onde componentes podem aparecer ou desaparecer na evolução do sistema. O operador que estudamos, operador Stavskaya Variável, é formado a partir de uma composição de dois operadores conhecidos como operadores de substituição.

Em nosso estudo, as componentes são localizadas em uma rede unidimensional e podem assumir dois estados, a saber: *mais* e *menos*. Duas transformações são possíveis: na primeira, entre quaisquer duas componentes, nasce uma componente no estado mais com probabilidade  $\beta$ ; na segunda, sempre que uma componente mais é a vizinha mais próxima a direita de uma componente menos, então ela desaparece com probabilidade  $\alpha$ .

É bastante comum em pesquisas sobre SPI chamarmos medidas invariantes por translação de medidas uniformes [11]. Um resultado sobre a convergência do processo de Stavskaya com comprimento variável foi mostrado em [18] considerando medidas uniformes. Aqui, considerando  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $\beta \in (0, 1)$  e para qualquer medida inicial, mostramos que o processo de Stavskaya com comprimento variável sempre converge para um sistema onde todas as componentes estão no estado menos. Em adição, mostramos que a velocidade de convergência do processo é no máximo geométrica, no sentido que a velocidade que a quantidade de componentes no estado mais aumenta em função do tempo é limitada superiormente por uma função que descreve uma progressão geométrica em função deste tempo. Também consideramos  $\alpha = 1$ ,  $\beta > 0$  e uma medida inicial satisfazendo uma das condições a seguir: (a) a medida inicial possui com probabilidade 1, bi-infinitas posições  $\{i_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ , com  $|i_l - i_{l+1}| > 1$  e toda componente  $i_k$ , entre as componentes  $i_l, i_{l+1}$ , está no estado mais; (b) a medida inicial é uniforme e a densidade inicial de mais no sistema é positiva. Nestes dois casos, mostramos que o processo sempre converge para a medida concentrada em um sistema com todas as componentes no estado menos. No Teorema 2.2.4, nós apresentamos o tipo de transição de fase presente no processo de Stavskaya com comprimento variável e que foi sugerido em [18], o qual se dá pelo tempo médio que densidade de componentes no estado mais é maior ou igual a uma constante  $c \in (0, 1)$  pela primeira vez. Nós também desenvolvemos alguns estudos numéricos, os quais, por meio de simulação de Monte Carlo, ilustram o tipo de transição de fase diferente daquele presente em seu análogo com comprimento fixo. Do nosso estudo de simulação, conjecturamos a existência de  $(\alpha, \beta) \in (0, 1) \times (0, 1]$  para o qual o tempo médio que a frequência de mais é maior ou igual a uma constante  $c \in (0, 1)$  pela primeira vez é logarítmico, no sentido que este tempo médio é descrito por uma função logarítmica.

No capítulo 3, tomamos um processo de difusão, descrito por uma equação diferencial parcial. Mostramos que sua equação de diferença finita, *Difus*, é levada via ultradiscretização no operador determinístico do processo de Stavskaya, *D*. Obtemos uma equação de diferença parcial estocástica, a qual chamamos de *Processo de Stavskaya de*

*Difusão*, PSD por simplicidade, pela ação em cada passo de tempo discreto dos operadores *Difus* seguido de um outro aleatório (nesta ordem). Diferente do processo que o motivou, cada partícula do PSD assume valor num conjunto não enumerável. Mais especificamente, ele atua no conjunto de medidas de probabilidade em  $[1, \infty)^{\mathbb{Z}}$ . O PSD é definido como uma composição de dois operadores. Sob ação do operador determinístico, *Difus*, cada componente assume um valor dado por uma média ponderada entre os valores da própria componente e de sua vizinha mais próxima à direita no tempo anterior. Em seguida, cada componente com valor maior que 1 assume valor 1 com probabilidade  $\alpha$ , independente do que ocorre nos demais locais. Verificamos que o operador *Difus* é monótono e linear, assim como a equação diferencial parcial que usamos para obtê-lo, equação de onda linear de primeira ordem, e o operador *D*. Quando o PSD possui, inicialmente, uma quantidade finita de componentes que assumem valor maior que 1, mostramos que o operador *Difus* apresenta a propriedade da erosão, o que é qualitativamente diferente do operador *D*. Mostramos que o PSD é sempre eroder. Ainda para  $\alpha > 0.323$ , mostramos que o PSD é ergódico. Estimamos o comportamento do PSD por meio do bem conhecido método de aproximações de campo médio. Por fim, realizamos um estudo de simulação comparando o processo de Stavskaya e o PSD. Em nossa análise, o comportamento do processo de Stavskaya é qualitativamente semelhante ao PSD, isto é, para os valores de  $\alpha$  considerados na simulação, quando o processo de Stavskaya manteve alta densidade de componentes no estado 1, o PSD manteve alta densidade de componentes com valor maior que 1 até o passo de tempo considerado. Em um cenário,  $\alpha = 0.3$ , o processo de Stavskaya manteve densidade positiva de componentes no estado 1 até o tempo considerado, mas apresentou sinais de erosão. No PSD, para este mesmo valor do parâmetro  $\alpha$  e tempo considerados, o processo erodiu. No outro caso considerado, ambos os processos apresentaram erosão em tempo finito.

No capítulo 4, nós apresentamos as nossas principais contribuições e possibilidades de pesquisas futuras.

## 2 PROCESSO DE STAVSKAYA COM COMPRIMENTO VARIÁVEL: NOVOS *INSIGHTS*

### 2.1 DEFINIÇÕES

Utilizaremos um conjunto finito chamado *alfabeto*, cujos elementos são chamados *letras*. Chamamos por *palavra* qualquer sequência finita de letras e definimos o comprimento de uma palavra como o número de letras presentes na palavra. Uma letra representa uma palavra cujo comprimento é um e  $\wedge$  denota a *palavra vazia* cujo comprimento é zero. Definimos *dicionário*, o conjunto de todas as palavras possíveis. Em nosso estudo, utilizaremos um alfabeto que é composto por duas letras, chamadas *mais* e *menos* e denotadas por  $\oplus$  e  $\ominus$  respectivamente. Assim, nosso dicionário é o conjunto de todas as sequências finitas formadas por  $\oplus$  ou  $\ominus$  denotado por  $\text{dic}(\{\oplus, \ominus\})$ . Para uma palavra  $W$ , denotamos o número de letras que a compõe por  $|W|$ .

O nosso espaço de configurações é  $\{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$ , o conjunto das sequências bi-infinitas, cujos termos são menos e mais. Cada sequência bi-infinita é uma configuração. Uma configuração é dita *todas mais*,  $\oplus^{\mathbb{Z}}$ , quando todas as suas componentes são *mais* e é dita *todas menos*,  $\ominus^{\mathbb{Z}}$ , quando todas as suas componentes são *menos*.

Chamamos cilindro fino qualquer conjunto da forma

$$\{s \in \{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}} : s_i = a_i \text{ para todo } i \in [m, n]\}$$

em que  $s_i$  é uma componente que assume o estado  $a_i \in \{\ominus, \oplus\}$ . Consideramos medidas de probabilidade em  $\{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$ , ou seja, na  $\sigma$ -álgebra gerada pelos cilindros finos e denotamos o conjunto dessas medidas por  $\mathcal{M}$ . Para uma configuração  $s$  em  $\{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$ , denotamos por  $\delta_s$  a sua medida concentrada com  $\delta_s \in \mathcal{M}$ . As medidas concentradas nas configurações *todas mais* e *todas menos* são denotadas por  $\delta_{\oplus^{\mathbb{Z}}}$  e  $\delta_{\ominus^{\mathbb{Z}}}$  respectivamente. Medidas concentradas também são referenciadas na literatura como medidas de massa pontual. A convergência em  $\mathcal{M}$ , significa convergência em todos os cilindros finos. Denotamos um operador  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ . Adotamos a seguinte convenção: escreveremos operadores à direita de medidas,  $\mu P$ , que indica a ação desse operador sobre essa medida, de modo que a ordem em que os operadores são escritos determina a ordem de aplicação de cada operador sobre a medida. A notação,  $\mu P^t$ , significa o resultado de  $t$  aplicações do operador  $P$  sobre a medida  $\mu$ .

Nosso estudo foca em um processo cujo operadores pertencem a uma classe especial

de operadores de interação, chamados operadores de substituição [2, 17]. Dadas palavras  $V$  e  $W$  e um parâmetro  $\beta$  pertencente à  $[0, 1]$ , denotamos a transformação de  $V$  em  $W$  por  $V \xrightarrow{\beta} W$ . Intuitivamente, estes operadores de interação transformam uma palavra  $V$  em uma palavra  $W$  com probabilidade  $\beta$ , ou mantêm a mesma palavra com probabilidade  $(1 - \beta)$ . Note que diferente dos processos clássicos, onde os comprimentos de  $V$  e  $W$  são sempre iguais, em nosso processo os comprimentos de  $V$  e  $W$  não necessitam ser iguais.

Denotamos por  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais,  $\mathbb{Z}$  o conjunto dos números inteiros e  $\mathbb{Z}_+$  o conjunto dos números naturais incluindo o zero. De maneira usual, definimos translações em:  $\mathbb{Z}$ ,  $\{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$  e  $\mathcal{M}$ . Dizemos que uma medida é uniforme quando ela é invariante sob todas translações. Denotamos o conjunto de medidas uniformes por  $\mathcal{M}_U$ . Ao que sabemos, são essas medidas em que se baseia a grande parte da teoria desenvolvida até aqui (ver [19, 20]). Isso nos permite denotar medidas de cilindros finos de forma simplificada. Para cada medida  $\mu \in \mathcal{M}_U$ , a notação  $\mu(a_0, a_1, \dots, a_n)$  significa

$$\mu(s_i = a_0, s_{i+1} = a_1, \dots, s_{i+n} = a_n)$$

com  $i \in \mathbb{Z}$  e chamamos a densidade da palavra  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  na medida  $\mu$ .

### 2.1.1 Palavras Aleatórias e Convergência

Uma *palavra aleatória*,  $W$ , em  $\{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$  é definida como um vetor aleatório concentrado em um subconjunto finito  $\Delta_W$ , de  $\text{dic}(\{\oplus, \ominus\})$ , ver seção 2.1. Ou seja,  $\forall V \in \Delta_W$ ,  $\mathbb{P}(W = V) > 0$ ,  $\sum_{V \in \Delta_W} \mathbb{P}(W = V) = 1$  e  $\Delta_W$  é finito. A evolução das palavras aleatórias que definimos aqui é semelhante à evoluções quânticas das palavras. Este tipo de estudo também pode ser encontrado na literatura como gramáticas aleatórias, probabilísticas ou estocásticas [24, 25, 26].

Denotamos por  $\mathcal{X}$  o conjunto das palavras aleatórias em  $\{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$ . O uso de palavras aleatórias pode ser encontrado em [17, 19, 24].

Tomemos palavras  $W = w_1 \dots w_m$  e  $V = v_1 \dots v_n$  onde  $m \leq n$ . Dizemos que  $W$  entra  $V$  na posição  $j \in \{0, \dots, n - m\}$  se  $i \in \{1, \dots, m\}$  implica  $w_i = v_{i+j}$ .

Denotamos  $q_V(W)$  a *quantidade de posições* que  $W$  entra  $V$ .

Definimos a *quantidade de posições* que  $W$  entra  $X$ ,  $q_X(W)$ , a variável aleatória onde

$$\mathbb{P}(q_X(W) = k) = \sum_{V \in \Delta_X: q_V(W) = k} \mathbb{P}(X = V).$$

Para palavra aleatória  $X$  e palavra aleatória  $W$ , definimos a *densidade das quantidades* das posições que  $W$  entra  $X$  por

$$d_X(W) = \frac{q_X(W)}{|X| - |W| + 1}, \quad (2.1)$$

onde  $|X|$  e  $|W|$  denotam o número de letras das palavras  $X$  e  $W$  respectivamente.

Se para todo  $V \in \Delta_X$  é tal que  $|V| < |W|$ , então  $q_X(W) = d_X(W) = 0$ . Além disso, se  $W = \wedge$ , então  $q_X(W) = |X| + 1$ . Logo,  $d_X(W) = 1$ .

Geralmente, quando falamos em convergência em sistemas de partículas multicomponentes, dizemos que há convergência se para qualquer cilindro a evolução do processo nesse cilindro converge [11]. Em geral, esta definição não se aplica a processos com comprimento variável. Iremos apresentar uma definição adequada de convergência destes processos [17].

Consideremos uma sequência de palavras aleatórias  $X_1, X_2, \dots$  tal que para cada  $r \in \mathbb{R}_+$  temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_t| > r) = 1.$$

Dizemos que essa sequência converge para uma medida  $\mu \in \mathcal{M}$  se para cada palavra  $W$  e  $\epsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|d_{X_t}(W) - \mu(W)| > \epsilon) = 0. \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Não linearidade de Processos de Partículas com Comprimento Variável

Geralmente, nos processos de Markov, o que inclui os sistemas com partículas interagentes, a evolução no nível das medidas é linear. O conjunto das medidas de probabilidade é convexo. Sendo linear o operador, dadas pelo menos duas destas medidas invariantes, a combinação convexa também será invariante para a operação linear. Processos Markovianos não lineares tem aparecido em exemplos recentes de sistemas de partículas interagentes, chamados sistemas de partículas interagentes com comprimento variável [21]. Em um exemplo simples, consideramos o operador  $\text{Mitose}_\alpha$ , o qual duplica cada componente no estado mais com probabilidade  $\alpha$ .

Tomamos

$$\nu = \lambda \delta_{\oplus^z} + (1 - \lambda) \delta_{\ominus^z}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Logo,  $\nu(\oplus) = \lambda$ . Se  $\text{Mitose}_\alpha$  for linear, então

$$\nu \text{Mitose}_\alpha = \lambda \delta_{\oplus z} \text{Mitose}_\alpha + (1 - \lambda) \delta_{\ominus z} \text{Mitose}_\alpha \implies \nu \text{Mitose}_\alpha(\oplus) = \lambda \quad (2.3)$$

Contudo,

$$\begin{aligned} \nu \text{Mitose}_\alpha(\oplus) &= \frac{\nu(\oplus) + \alpha \nu(\oplus)}{1 + \alpha \nu(\oplus)} \\ &= \frac{\lambda(1 + \alpha)}{1 + \alpha \lambda}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para que (2.3) seja igual a (2.4), quando  $\lambda \in (0, 1)$ , é necessário que

$$\lambda = \frac{\lambda(1 + \alpha)}{1 + \alpha \lambda} \Leftrightarrow \alpha \lambda = \alpha, \quad (2.5)$$

o que ocorre somente se  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \lambda = 1$ . Os casos  $\lambda \in \{0, 1\}$  foram excluídos, pois, nestes casos  $\nu \in \{\delta_{\ominus z}, \delta_{\oplus z}\}$  os quais são medidas invariantes para  $\text{Mitose}_\alpha$ . Logo, a condição (2.5) implica que  $\nu$  não é invariante para  $\lambda \in (0, 1)$  e  $\alpha > 0$ , ou seja,  $\text{Mitose}_\alpha$  não é linear.

### 2.1.3 Operador de Stavskaya com Comprimento Variável

Considere o operador de substituição  $\wedge \xrightarrow{\beta} \oplus$ , que nós chamamos *nascimento* e denotamos por  $N_\beta$ , o qual depende de um parâmetro real  $\beta$ . Sobre sua ação, entre quaisquer duas componentes vizinhas, nasce uma nova componente no estado *mais* com probabilidade  $\beta$  independente do que acontece nos demais locais. Se considerarmos um processo semelhante em configurações finitas, cada ação de nascimento aumenta, com probabilidade  $\beta$ , em uma unidade o comprimento da configuração.

Considere o operador de substituição  $\oplus \ominus \xrightarrow{\alpha} \ominus$ , o qual nós chamamos *morte* e denotamos por  $M_\alpha$ . Este depende de um parâmetro real  $\alpha$ . Sobre sua ação, sempre que uma componente no estado *mais* é o vizinho mais próximo à direita de uma componente no estado *menos*, então essa componente *mais* desaparece com probabilidade  $\alpha$ , ou permanece com probabilidade  $1 - \alpha$ , independente do que acontece nos demais locais. Se considerarmos um processo semelhante em configurações finitas, cada ação de morte diminui, com probabilidade  $\alpha$ , em uma unidade o comprimento da configuração. Assim, o operador Stavskaya com comprimento variável, o qual denotamos por  $VS$ , é dado por

$$N_\beta \circ M_\alpha$$

(primeiro nascimento e então morte). O sinal  $\circ$  significa composição e, por razões tipográficas, ele será omitido.

Note que  $\delta_{\oplus z}$  é invariante para o processo **VS**. Na ação do operador **VS**, se  $\alpha = \beta = 0$ , então toda distribuição inicial é invariante; se  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ , então dada qualquer medida inicial do processo, a densidade de palavras do tipo  $\ominus \oplus^k \ominus$ , onde  $\oplus^k$  denota  $k$  consecutivos mais, onde  $k \in \mathbb{Z}_+$ , tende para zero na evolução do processo; se  $\alpha = \beta = 1$ , então para qualquer  $\delta$ -medida inicial diferente de  $\delta_{\ominus z}$  a densidade de mais no processo tende a 1; se  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ , então o processo sempre converge para a medida  $\delta_{\oplus z}$ . Como estes casos, para determinados valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , foram completamente descritos, não os consideraremos daqui em diante.

## 2.2 PRINCIPAIS RESULTADOS

Em nosso estudo, nós não nos limitamos a medidas uniformes [18, 19]. Dados  $i, j \in \mathbb{Z}$  com  $i < j$ , definimos o evento

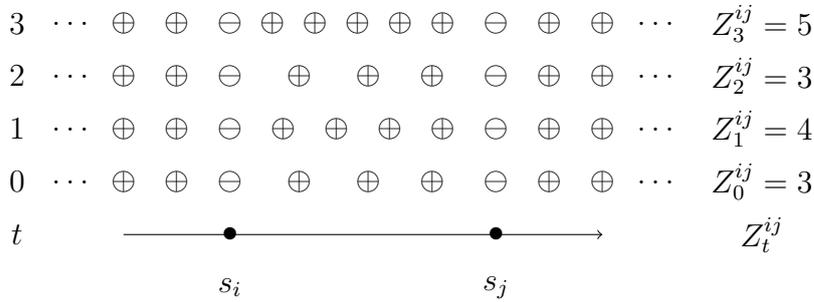
$$E_{ij} = \{s \in \Omega : s_i = s_j = \ominus \text{ e } s_k = \oplus \text{ para } i < k < j\}.$$

Considerando  $\mu(E_{ij}) > 0$ , então um dos seguintes casos ocorre: (a) há infinitos  $\{i, j\}$  tais que  $s_i = s_j = \ominus$  e  $s_k = \oplus$  para  $i < k < j$  ocorre com probabilidade positiva; (b) há finitos  $\{i, j\}$  tal que  $s_i = s_j = \ominus$  e  $s_k = \oplus$  para  $i < k < j$  ocorre. Para cada par  $\{i, j\}$  onde  $\mu(E_{ij}) > 0$ , o nascimento e morte de componentes entre  $s_i$  e  $s_j$  acontecem de forma independente das outras posições. No caso particular quando  $\mu(E_{ij}) = 0$ , para todo par  $(i, j)$  pode ocorrer:  $\mu = \delta_{\oplus z}$ ;  $\mu$  é uma medida concentrada em uma configuração em que apenas uma componente está no estado menos, além de outros casos que não descrevemos aqui.

Em nosso processo, componentes no estado menos nunca aparecem ou desaparecem no sistema. Assim, nós podemos atribuir coordenadas espaciais às componentes menos utilizando subconjunto dos números inteiros. Já as componentes mais aparecem e desaparecem no sistema, o que dificulta a atribuição de coordenadas espaciais exatas à elas. No entanto, podemos atribuir coordenadas espaciais para as componentes mais na distribuição inicial do sistema utilizando subconjunto dos números inteiros. Além disso, sempre que uma componente mais nasce entre duas componentes, é suficiente indicar a qual segmento  $\{i, j\}$ , com  $i < j$ , ela pertence e então assumimos que sua coordenada espacial fica entre as posições delas.

Na Figura 2, ilustramos a ação do nosso operador  $\mathbf{VS}$  em um fragmento do processo, isto é, a qual pode ocorrer com probabilidade positiva. Quando  $t = 0$ , há três componentes no estado mais entre os menos nas componentes  $s_0$  e  $s_1$ , havendo quatro palavras vazias. Na transição para  $t = 1$ , houve um nascimento e nenhuma morte, ficando quatro mais. Na transição para  $t = 2$ , não houve nascimentos e houve uma morte, ficando três mais. Na transição para  $t = 3$ , houveram três nascimentos e uma morte, ficando cinco mais.

**Figura 2 – Evolução do fragmento do processo. Observamos o que ocorre entre as componentes  $s_i$  e  $s_j$  e os valores para  $Z_t^{ij}$  associados a cada tempo.**



Fonte: Autoria Própria.

Mostraremos que a quantidade de mais entre duas componentes consecutivas no estado menos, nas posições  $i$  e  $j$ , pode ser descrita por uma cadeia de Markov homogênea no tempo, não no espaço, (ver Apêndice ??).

Seja  $Z$  uma cadeia de Markov, uma função *velocidade*  $V : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$  e  $Y$  uma variável aleatória positiva, tal que  $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{Z_t}{V(t)} - Y \right| > \epsilon \right) = 0. \quad (2.6)$$

Dizemos neste caso, que o processo  $Z$  *tende para infinito com velocidade*  $V(t)$ .

Sejam  $\mu \in \mathcal{M}$ , onde  $\mu(E_{ij}) > 0$ , e  $Z_t^{ij}$  a variável aleatória que descreve a quantidade de mais entre as posições  $i$  e  $j$  no tempo  $t$ . Sendo que  $Z_t^{ij}$  tem distribuição  $\mu \mathbf{VS}^t(E_{ij})$ . Se  $Z_t^{ij}$  satisfaz (2.6) para uma dada função  $V$  e uma variável aleatória positiva  $Y^{ij}$ , dizemos que  $\mu \mathbf{VS}^t$  converge para  $\delta_{\oplus z}$  com *velocidade*  $V(t)$ .

**Teorema 2.2.1.** *Sejam  $\mu \in \mathcal{M}$ ,  $\alpha \in [0, 1)$  e  $\beta \in (0, 1)$ . A velocidade que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \mathbf{VS}^t = \delta_{\oplus z}$ , caso exista, é no máximo geométrica. Em particular, quando  $\alpha = 0$ , o processo  $\mu \mathbf{VS}^t$  com  $t \rightarrow \infty$  converge para  $\delta_{\oplus z}$  com velocidade geométrica dada por  $(1 + \beta)^t$ .*

Para dados  $\alpha, \beta \in [0, 1)$ , o Teorema 2.2.1 estabelece um limite superior para a velocidade de  $\delta_{\ominus^z} \mathbf{VS}^t$ .

**Teorema 2.2.2.** *Sejam  $\alpha < 1$  e  $\beta > 0$  e  $\mu \in \mathcal{M}$ . Então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \mathbf{VS}^t = \delta_{\oplus^z}. \quad (2.7)$$

O teorema 2.2.2 foi provado em [18] para medidas uniformes. Neste caso, foram descritos alguns resultados para cadeias de Markov em  $\mathbb{Z}_+$ , os quais podem ser utilizados em estudos de cadeias de Markov sob condições descritas lá. Aqui, nós apresentamos uma prova para qualquer  $\mu \in \mathcal{M}$ .

**Teorema 2.2.3.** *Sejam  $\alpha = 1$  e  $\beta > 0$ . Se (a) ou (b) são satisfeitas, então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \mathbf{VS}^t = \delta_{\oplus^z}.$$

(a)  $\mu$  é uma  $\delta$ -medida concentrada numa configuração  $s$ , tal que há bi-infinitas posições

$$\{i_l\}_{l \in \mathbb{N}} \text{ com } |i_l - i_{l+1}| > 1, \text{ onde } \mu(E_{i_l i_{l+1}}) = 1;$$

(b)  $\mu \in \mathcal{M}_U$  e  $\mu(\oplus) > 0$ .

**Teorema 2.2.4.** *Sejam  $N$  um valor natural e  $\tau_N = \inf \left\{ t \geq 0 : \delta_{\ominus^z} \mathbf{VS}^t(\oplus) \geq \frac{N}{N+1} \right\}$ .*

(a) *Se  $\beta \geq \frac{1}{2(1-\alpha)}$ , então  $\tau_N$  é no máximo polinomial de grau dois;*

(b) *Se  $\beta < \frac{1}{N!(1-\alpha)}$ , então  $\tau_N$  é no mínimo superexponencial.*

Em [18] foi sugerida a existência de algum tipo de transição de fase. Contudo, esta transição de fase é diferente daquela observada no processo de Stavskaya com comprimento fixo [4] e no processo de contato [1], onde é observada a evolução da densidade de uma letra no sistema.

O Teorema 2.2.4 apresenta o tipo de transição de fase existente no processo de Stavskaya com comprimento variável. Numa direção, o tempo médio da frequência de mais ser maior ou igual a  $\frac{N}{N+1}$  pela primeira vez é no máximo polinomial de grau dois. Na outra direção, este tempo médio é pelo menos superexponencial.

## 2.3 UMA REPRESENTAÇÃO EM $\mathbb{Z}_+$ DO PROCESSO VS

Seja  $s \in \{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$  e  $\delta_s$  sua respectiva  $\delta$ -medida, isto é, a medida concentrada em  $s$ . Considere que a densidade de menos em  $\delta_s$  é positiva, isto é,  $s$  é uma configuração tal que

existe  $i \in \mathbb{Z}$  com  $s_i = \oplus$ . Caso não seja,  $\delta_s = \delta_{\oplus \mathbb{Z}}$ . Além disso, em  $s$ , com probabilidade 1, há posições  $i, j$  e algum  $k$  tal que o evento  $E_{ij}$  ocorre. Assim, estudaremos em cada passo de tempo, a quantidade de mais em  $E_{ij}$ . Claro que para cada posição  $i$  e  $j$  satisfazendo o que descrevemos, teremos uma quantidade inicial,  $j - i - 1$ , de componentes no estado mais. Observe que se  $j = i + 1$ , então não há componentes no estado mais entre as componentes  $s_i, s_j$  inicialmente. Logo, teremos zero componentes no estado mais em  $E_{ij}$ .

Mostraremos que a quantidade de mais para cada passo de tempo  $t$ , a qual denotamos por  $Z_t^{ij}$ , evolui como uma cadeia de Markov assumindo valores em  $\mathbb{Z}_+$ . Além disso, teremos  $Z_0^{ij} = j - i - 1$ .

Informalmente falando, o processo  $(Z_t^{ij})_{t \in \mathbb{Z}_+}$  pode ser descrito pelo seguinte cenário:

- **Primeira metade do passo:** havendo  $Z_t^{ij}$  componentes, teremos  $Z_t^{ij} + 1$  palavras vazias na configuração. Cada uma dessas palavras vazias pode se transformar em um mais com probabilidade  $\beta$  ou permanecer vazia com probabilidade  $(1 - \beta)$ . Como cada uma dessas substituições é independente uma da outra, temos que a quantidade de palavras vazias substituídas por mais segue uma binomial com parâmetros  $\beta$  e  $Z_t^{ij} + 1$ , ou seja

$$\Psi_t^{ij} = Z_t^{ij} + X_t;$$

com  $X_t$  seguindo uma binomial  $\beta$ ,  $Z_t^{ij} + 1$ , isto é,  $X_t \sim \text{Bin}(Z_t^{ij} + 1, \beta)$ .

- **Segunda metade do passo:** dado que há uma quantidade de mais,  $Z_t^{ij}$  acrescida da quantidade de palavras vazias substituídas por mais,  $X_t$ . Para esta quantidade,  $\Psi_t^{ij}$ , segue: se esta quantidade de mais for igual a zero, nada ocorre; se esta quantidade for positiva, então ela será diminuída por uma unidade com probabilidade  $\alpha$ . Ou seja,

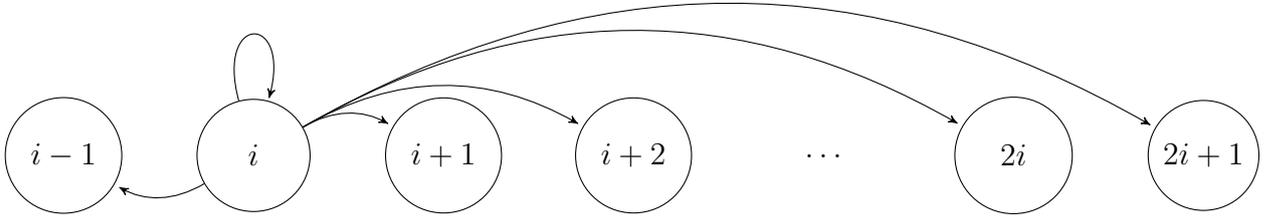
$$Z_{t+1}^{ij} = \Psi_t^{ij} - Y_t \mathbb{I}_{\{\Psi_t^{ij} > 0\}}(\Psi_t^{ij})$$

com  $Y_t$  seguindo distribuição Bernoulli com parâmetro  $\alpha$ , isto é,  $Y_t \sim \text{Ber}(\alpha)$  e  $\mathbb{I}_{\{\cdot\}}(\cdot)$  é a função indicadora.

É evidente que a **primeira metade** seguida da **segunda metade**, nesta ordem, descreve a quantidade de mais quando observamos o que ocorre entre duas componentes consecutivas no estado menos, após a ação do operador Nascimento seguido do operador Morte.

Por questões de simplicidade, denotaremos  $Z_t$  ao invés de  $Z_t^{ij}$ . Na Figura 3, apresentamos o diagrama de transições de  $Z_t$ , quando  $Z_t = i > 0$ .

**Figura 3 – Diagrama de transição do processo  $Z$ .**



Fonte: Autoria Própria.

É possível descrevermos a expressão da probabilidade de transição de  $Z_t$  para  $Z_{t+1}$ .

Sejam  $\alpha \in (0, 1)$  e  $\beta \in (0, 1]$ . Então para  $i > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{n+1} = i + k | Z_n = i) &= \mathbb{P}(\{\text{Substitui-se } k \text{ vazios por } k \text{ mais}\} \cap \{\text{não retirou um mais}\}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\{\text{Substitui-se } k + 1 \text{ vazios por } k + 1 \text{ mais}\} \cap \{\text{retirou um mais}\}) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \alpha(1 - \beta)^{i+1}, & \text{para } k = -1, \\ (1 - \alpha)\beta^{i+1}, & \text{para } k = i + 1, \\ \binom{i + 1}{k} (1 - \alpha)\beta^k (1 - \beta)^{i+1-k} + \binom{i + 1}{k + 1} \alpha\beta^{k+1} (1 - \beta)^{i-k}, & \text{para } k \in \{0, 1, \dots, i\} \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (2.8)$$

onde se  $k = -1$ , então o evento  $\{\text{Substitui-se } k \text{ vazios por } k \text{ mais}\}$  é vazio.

Para  $i = 0$ , temos

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k | Z_n = i) = \begin{cases} 1 - \beta(1 - \alpha), & \text{se } k = 0, \\ \beta(1 - \alpha), & \text{se } k = 1. \end{cases}$$

Assim, descrevemos por completo as probabilidades de transição do processo  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ .

A Figura 2 ilustra a ação do operador VS agindo no fragmento de uma configuração. A direita, descrevemos os valores assumidos pelo processo  $Z^{ij}$  em cada passo de tempo. Quando  $t = 0$ , entre os menos das componentes  $s_i$  e  $s_j$ , há três componentes no estado

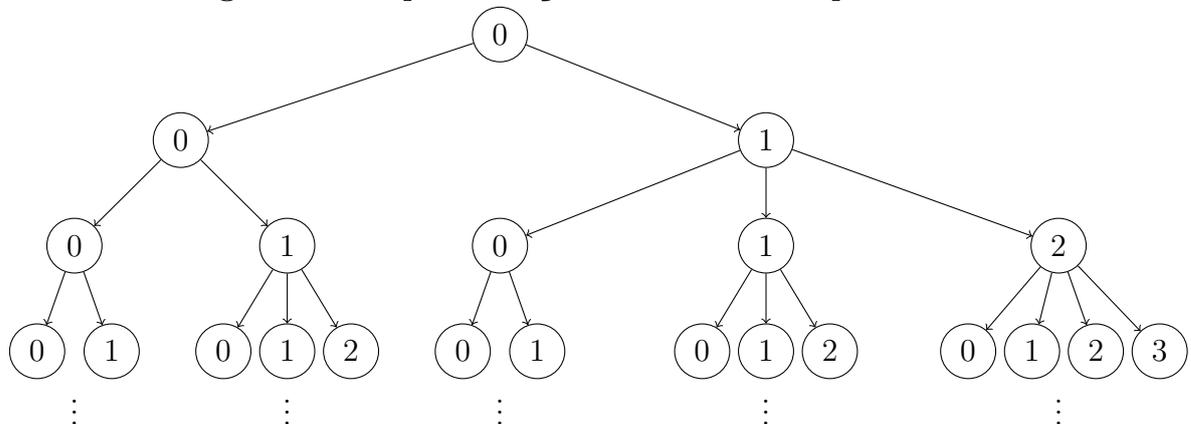
mais, logo fazemos  $Z_0^{ij} = 3$ . Na transição para  $t = 1$ , na **primeira metade do passo**,  $X_0 = 1$  e como  $Z_0^{ij} + X_0 > 0$ , fazemos na **segunda metade do passo**,  $Y_0 = 0$ , logo  $Z_1^{ij} = 4$ , equivalendo a quatro componentes no estado mais entre as duas no estado menos. Na transição para  $t = 2$ , na **primeira metade do passo**, fazemos  $X_1 = 0$  e como  $Z_1^{ij} + X_1 > 0$ , depois, na **segunda metade do passo**,  $Y_1 = 1$ , logo  $Z_2^{ij} = 3$ , equivalendo a três componentes no estado mais entre as duas no estado menos. Na transição para  $t = 3$ , na **primeira metade do passo**, fazemos  $X_2 = 3$  e como  $Z_2^{ij} + X_2 > 0$ , depois, na **segunda metade do passo**,  $Y_2 = 1$ , logo  $Z_3^{ij} = 5$ , equivalendo a cinco componentes no estado mais entre as duas no estado menos.

O processo  $Z$  será utilizado para provar os Teoremas 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3. Note que o processo  $Z$  tem três comportamentos bem distintos, a saber: quando o parâmetro  $\alpha = 0$ , o processo comporta-se como um processo de crescimento populacional; No segundo caso,  $\alpha \in (0, 1)$ , o processo  $Z$  tem o mesmo comportamento qualitativo; por fim, no 3º caso ( $\alpha = 1$ ), o processo passa a exibir 0 como estado absorvente. Decorrente disso, estudaremos o processo  $Z$  considerando em cada desses casos.

#### 2.4 O PROCESSO $Z$ COM $\alpha = 0$

Nesta seção, estudaremos algumas características do processo  $Z$  quando  $\beta \in (0, 1)$  e  $\alpha = 0$ . O processo  $Z$  descrito na seção 2.3 é semelhante a um processo de crescimento populacional quando  $\alpha = 0$ , pois, apenas a **segunda metade do passo** ocorre, isto é, nascimento. Na Figura 4, exibimos um diagrama de árvore dos possíveis estados que  $Z$  pode assumir nesta situação.

**Figura 4 – Representação em árvore do processo  $Z$ .**



Fonte: Autoria Própria.

É importante perceber que há uma diferença entre um processo de ramificação [27] e o processo  $Z$  com  $\alpha = 0$ . Neste último, para obter a população no tempo  $t + 1$ , é mantido o número de indivíduos no tempo  $t$  e acrescentamos a quantidade de nascimentos que ocorre no tempo  $t + 1$ . Já no processo de ramificação, temos 0 como um estado absorvente e para obter a população no tempo  $t + 1$  é apenas considerada a quantidade de nascimentos que ocorre no tempo  $t + 1$ .

Note que, podemos descrever  $Z_{t+1}$  como

$$Z_{t+1} = Z_t + \sum_{l=1}^{Z_t+1} \xi_t^{(l)}, \quad (2.9)$$

onde  $(\xi_t^{(l)})_{\{l,t\} \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com  $\mathbb{P}(\xi_t^{(l)} = 1) = \beta$  e  $\mathbb{P}(\xi_t^{(l)} = 0) = 1 - \beta$ .

#### 2.4.1 Primeiro e segundo momentos de $Z_t$ quando $\alpha = 0$

Como é usual, denotamos o valor esperado por  $\mathbb{E}(\cdot)$ . Através de (2.9), segue

$$\mathbb{E}(Z_{t+1}) = \mathbb{E}(Z_t) + \mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{Z_t+1} \xi_t^{(l)}\right). \quad (2.10)$$

Daí, usando a lei da esperança total

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{Z_t+1} \xi_{t+1}^{(k)}\right) &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{Z_t+1} \xi_{t+1}^{(k)} \mid Z_t = l\right) \mathbb{P}(Z_t = l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{l+1} \xi_{t+1}^{(k)}\right) \mathbb{P}(Z_t = l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)\beta \mathbb{P}(Z_t = l) \\ &= \beta(1 + \mathbb{E}(Z_t)). \end{aligned}$$

Logo, a identidade (2.10) pode ser reescrita como

$$\mathbb{E}(Z_{t+1}) = (1 + \beta)\mathbb{E}(Z_t) + \beta. \quad (2.11)$$

Denotamos  $\mathbb{E}_i(\cdot)$ , o valor esperado para uma cadeia de Markov condicionada que a cadeia iniciou no estado  $i$ .

**Lema 2.4.1.** *Dado  $Z_0$ , temos  $\mathbb{E}_{Z_0}(Z_t) = (1 + \beta)^t(1 + Z_0) - 1$ .*

**Prova:** Faremos a prova por indução em  $t$ . Usando (2.11)

**Base de indução:** Para  $t = 1$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{Z_0}(Z_1) &= (1 + \beta)\mathbb{E}(Z_0) + \beta \\ &= (1 + \beta)Z_0 + \beta \\ &= (1 + \beta)Z_0 + \beta + (1 + \beta) - (1 + \beta) \\ &= (1 + \beta)(1 + Z_0) - 1.\end{aligned}$$

**Hipótese de indução:** Para  $t = k$

$$\mathbb{E}_{Z_0}(Z_k) = (1 + \beta)^k(1 + Z_0) - 1.$$

**Passo de indução:** Seja  $t = k + 1$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{Z_0}(Z_{k+1}) &= (1 + \beta)[\mathbb{E}_{Z_0}(Z_k)] + \beta \\ &= (1 + \beta)[(1 + \beta)^k(1 + Z_0) - 1] + \beta \\ &= (1 + \beta)^{k+1}(1 + Z_0) - 1.\end{aligned}$$

■

Pelo Lema 2.4.1, se  $Z_0 = 0$ , então  $\mathbb{E}_0(Z_t) = (1 + \beta)^t - 1$ .

Agora, vamos para o segundo momento

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_{t+1}^2) &= \mathbb{E}\left[\left(Z_t + \sum_{k=1}^{Z_t+1} \xi_k^{(t)}\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}(Z_t^2) + \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{Z_t+1} \xi_k^{(t)}\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[Z_t \sum_{k=1}^{Z_t+1} \xi_k^{(t)}\right].\end{aligned}\tag{2.12}$$

Calcularemos separadamente o segundo termo do lado direito de (2.12).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=1}^{Z_t+1} \xi_k^t \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{Z_t+1} (\xi_k^t)^2 \right) + 2\mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{Z_t} \sum_{l=i+1}^{Z_t+1} \xi_i^{(j)} \xi_l^{(j)} \right) \\
&= \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{Z_t+1} \xi_k^t \right) + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{Z_t} \sum_{l=i+1}^{Z_t+1} \xi_i^{(j)} \xi_l^{(j)} \middle| Z_t = m \right) \mathbb{P}(Z_t = m) \\
&= \beta + \beta \mathbb{E}(Z_t) + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^m \sum_{l=i+1}^{m+1} \mathbb{E}(\xi_i^{(t)} | Z_t = m) \mathbb{E}(\xi_l^{(t)} | Z_t = m) \mathbb{P}(Z_t = m) \\
&= \beta + \beta \mathbb{E}(Z_t) + 2\beta^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^m \sum_{l=i+1}^{m+1} \mathbb{P}(Z_t = m) \\
&= \beta + \beta \mathbb{E}(Z_t) + 2\beta^2 \sum_{m=0}^{\infty} [m + (m-1) + \dots + 1] \mathbb{P}(Z_t = m) \\
&= \beta + \beta \mathbb{E}(Z_t) + 2\beta^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m+1)}{2} \mathbb{P}(Z_t = m) \\
&= \beta + \beta \mathbb{E}(Z_t) + \beta^2 \sum_{m=0}^{\infty} (m^2 + m) \mathbb{P}(Z_t = m) \\
&= \beta + \beta \mathbb{E}(Z_t) + \beta^2 [\mathbb{E}(Z_t) + \mathbb{E}(Z_t^2)]. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Para o último termo de (2.12) dividido por 2, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( Z_t \sum_{k=1}^{Z_t+1} \xi_k^t \right) &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{E} \left( Z_t \sum_{k=1}^{Z_t+1} \xi_k^t \middle| Z_t = l \right) \mathbb{P}(Z_t = l) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{E} \left( l \sum_{k=1}^l \xi_k^t \right) \mathbb{P}(Z_t = l) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} l \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^l \xi_k^t \right) \mathbb{P}(Z_t = l) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) \beta \mathbb{P}(Z_t = l) \\
&= \beta \sum_{l=0}^{\infty} (l^2 + l) \mathbb{P}(Z_t = l) \\
&= \beta \mathbb{E}(Z_t^2) + \beta \mathbb{E}(Z_t) \tag{2.14}
\end{aligned}$$

De (2.13), (2.14) e somando-se  $\mathbb{E}(Z_t^2)$ , o primeiro termo de (2.12), concluímos

$$\mathbb{E}(Z_{t+1}^2) = \mathbb{E}(Z_t^2)(1 + \beta)^2 + (3\beta + \beta^2)\mathbb{E}(Z_t) + \beta. \tag{2.15}$$

**Lema 2.4.2.** *Dado  $Z_0 = 0$ , temos*

$$\mathbb{E}_0(Z_t^2) = \frac{\beta(1 - (1 + \beta)^{2t})}{1 - (1 + \beta)^2} + (3\beta + \beta^2) \left[ \frac{(1 + \beta)^{2(t-1)} - (1 + \beta)^{(t-1)}}{\beta} + \frac{(1 + \beta)^{2(t-1)} - 1}{1 - (1 + \beta)^2} \right].$$

**Prova:** Faremos a prova por indução em  $t$ . Denotamos  $c_1 = (1 + \beta)^2$ ,  $c_2 = (3\beta + \beta^2)$  e  $c_3 = \beta$ . Para o caso em que  $Z_0 = 0$ , temos  $\mathbb{E}_0(Z_0^2) = 0$ . Vamos provar que

$$\mathbb{E}_0(Z_{t+1}^2) = c_3 \sum_{i=0}^t c_1^i + c_2 \sum_{i=1}^t c_1^{i-1} \mathbb{E}_0(Z_{t+1-i}). \quad (2.16)$$

De fato, usando indução em  $t$  e usando (2.15), segue:

**Base de indução:** Para  $t = 0$ ,

$$\mathbb{E}_0(Z_1^2) = c_3.$$

**Hipótese de indução:** Para  $t = k - 1$ ,  $\mathbb{E}_0(Z_k^2) = c_3 \sum_{i=0}^{k-1} c_1^i + c_2 \sum_{i=1}^{k-1} c_1^{i-1} \mathbb{E}_0(Z_{k-i})$ .

**Passo de indução:** Seja  $t = k$ , usando (2.15)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0(Z_{k+1}^2) &= c_1 \mathbb{E}_0(Z_k^2) + c_2 \mathbb{E}_0(Z_k) + c_3 \\ &= c_1 \left( c_3 \sum_{i=0}^{k-1} c_1^i + c_2 \sum_{i=1}^{k-1} c_1^{i-1} \mathbb{E}_0(Z_{k-i}) \right) + c_2 \mathbb{E}_0(Z_k) + c_3 \\ &= c_3 + c_3 \sum_{i=0}^{k-1} c_1^{i+1} + c_2 \mathbb{E}_0(Z_k) + c_2 \sum_{i=1}^{k-1} c_1^i \mathbb{E}_0(Z_{k-i}) \\ &= c_3 \sum_{i=0}^k c_1^i + c_2 \sum_{i=1}^k c_1^{i-1} \mathbb{E}_0(Z_{k+1-i}). \end{aligned}$$

Utilizando o Lema 2.4.1 e que  $\mathbb{E}_0(Z_t) = (1 + \beta)^t - 1$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0(Z_{t+1}^2) &= \beta \sum_{i=0}^t \left( (1 + \beta)^2 \right)^i + (3\beta + \beta^2) \sum_{i=1}^t \left( (1 + \beta)^2 \right)^{i-1} \left( (1 + \beta)^{t+1-i} - 1 \right) \\ &= \frac{\beta(1 - (1 + \beta)^{2t+2})}{1 - (1 + \beta)^2} + (3\beta + \beta^2) \left[ \frac{(1 + \beta)^{2t} - (1 + \beta)^t}{\beta} + \frac{(1 + \beta)^{2t} - 1}{1 - (1 + \beta)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

■

Denotamos por  $Var_i(\cdot)$ , a variância para um processo estocástico condicionado que ele iniciou no estado  $i$ .

**Lema 2.4.3.** Se  $\alpha = 0$ ,  $Z_0 = 0$  e  $X_t = \frac{Z_t}{(1 + \beta)^t}$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0(X_t) = 1$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} Var_0(X_t) = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$ .

**Prova:** Primeiro mostraremos  $\mathbb{E}_0(X_t)$ .

$$\mathbb{E}_0(X_t) = \frac{\mathbb{E}_0(Z_t)}{(1 + \beta)^t}.$$

Usando o Lema 2.4.1, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0(X_t) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \beta)^t} = 1. \quad (2.18)$$

Note que

$$\mathbb{E}_0(X_t^2) = \frac{\mathbb{E}_0(Z_t^2)}{(1 + \beta)^{2t}},$$

onde  $\mathbb{E}_0(Z_t^2)$  com  $\alpha = 0$  segue do Lema 2.4.2. Assim, temos

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0(X_t^2) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\beta(1 - (1 + \beta)^{2t})}{1 - (1 + \beta)^2} + (3\beta + \beta^2) \left[ \frac{(1 + \beta)^{2(t-1)} - (1 + \beta)^{t-1}}{\beta} + \frac{(1 + \beta)^{2(t-1)} - 1}{1 - (1 + \beta)^2} \right]}{(1 + \beta)^{2t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\beta(1 + \beta)^2}{\beta^2 + 2\beta} + (3\beta + \beta^2) \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2 + 2\beta} \right]}{(1 + \beta)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta(1 + \beta)^2 + (3\beta + \beta^2)(1 + \beta)}{(1 + \beta)^2(\beta^2 + 2\beta)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2(\beta^2 + 2\beta)}{(1 + \beta)(\beta^2 + 2\beta)} = \frac{2}{1 + \beta}, \quad \forall \beta \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Assim, como os limites de  $\mathbb{E}_0(X_t)$  e  $\mathbb{E}_0(X_t^2)$  existem e são finitos, temos por (2.18) e (2.19)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}_0(X_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbb{E}_0(X_t^2) - \mathbb{E}_0^2(X_t)) = \frac{2}{1 + \beta} - 1 = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}.$$

■

Um resultado conhecido na teoria dos processos estocásticos será indicado por **Auxiliar XX**. Esses resultados estão inseridos no Apêndice ??.

**Lema 2.4.4.** *Sejam  $Z_0 = 0, \beta \in (0, 1), c \in \mathbb{R}$  e*

$$X_t = \frac{Z_t}{(1 + \beta)^{ct}}.$$

- (a) Se  $c > 1$ , então para todo  $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(X_t > \epsilon) = 0$ ;
- (b) Se  $c = 1$  e  $a$  é um valor real positivo, então

$$0 < \mathbb{P}_0(X_t > 0) \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(X_t > a) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{1}{(1 + \beta)^t} \right) = \frac{1}{a};$$

**Prova:** Pela desigualdade de Markov e Lema 2.4.2.

$$\mathbb{P}_0(X_t > a) \leq \frac{\mathbb{E}_0(X_t)}{a} = \frac{1}{a} \frac{(1 + \beta)^t - 1}{(1 + \beta)^{ct}}. \quad (2.20)$$

Vejam os item (a). Observe que se  $c > 1$ , então  $c = 1 + h$  com  $h > 0$ . Logo, usando (2.20)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(X_t > a) \leq \frac{1}{a} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{(1 + \beta)^{ht}} - \frac{1}{(1 + \beta)^{(1+h)t}} \right] = 0.$$

Vejam os item (b). Primeiro, observe que para  $c = 1$

$$\mathbb{P}_0(X_t > a) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \frac{(1 + \beta)^t - 1}{(1 + \beta)^t} = \frac{1}{a}.$$

Para mostrar que  $0 < \mathbb{P}_0(X_t > 0)$ , utilizaremos (2), Lemas 2.4.1 e 2.4.2.

Se fizermos  $X_t = \frac{Z_t}{(1 + \beta)^t}$  e usando o Lema 2.4.3, o limite de  $Var_0(X_t)$  é igual a  $\frac{1 - \beta}{1 + \beta}$  quando  $t \rightarrow \infty$ , o que nos permite utilizar a desigualdade de Paley-Zygmund em **Auxiliar 2**, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(X_t > 0) > \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[\mathbb{E}_0(X_t)]^2}{\mathbb{E}_0(X_t^2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[\mathbb{E}_0(Z_t)]^2}{\mathbb{E}_0(Z_t^2)}.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[\mathbb{E}_0(Z_{t+1})]^2}{\mathbb{E}_0(Z_{t+1}^2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[(1 + \beta)^{t+1} - 1]^2}{\frac{\beta(1 - (1 + \beta)^{2t+2})}{1 - (1 + \beta)^2} + (3\beta + \beta^2) \left[ \frac{(1 + \beta)^{2t - (1 + \beta)^t}}{\beta} + \frac{(1 + \beta)^{2t} - 1}{1 - (1 + \beta)^2} \right]}$$

logo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[\mathbb{E}_0(Z_t)]^2}{\mathbb{E}_0(Z_t^2)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[(1 + \beta)^t - 1]^2}{\frac{-\beta(1 + \beta)^{2t}}{-(\beta^2 + 2\beta)} + (3\beta + \beta^2) \left[ \frac{(1 + \beta)^{2t}}{\beta} + \frac{(1 + \beta)^{2t}}{1 - (1 + \beta)^2} \right]} \\ &= \frac{(1 + \beta)^2}{\frac{\beta(1 + \beta)^2}{\beta^2 + 2\beta} + (3\beta + \beta^2) \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2 + 2\beta} \right]} \\ &= \frac{(1 + \beta)^2}{\frac{\beta(1 + \beta)^2}{\beta^2 + 2\beta} + (3\beta + \beta^2) \left[ \frac{\beta(1 + \beta)}{\beta(\beta^2 + 2\beta)} \right]} \\ &= \frac{(1 + \beta)^2(\beta^2 + 2\beta)}{\beta(1 + \beta)^2 + (3\beta + \beta^2)(1 + \beta)} \\ &= \frac{(1 + \beta)^2(\beta^2 + 2\beta)}{(1 + \beta)[\beta(1 + \beta) + 3\beta + \beta^2]} \\ &= \frac{(1 + \beta)(\beta^2 + 2\beta)}{\beta + \beta^2 + 3\beta + \beta^2} = \frac{(1 + \beta)(\beta^2 + 2\beta)}{2(\beta^2 + 2\beta)} > 0, \quad \forall \beta \in (0, 1]. \end{aligned}$$

■

O Lema 2.4.5 apresenta um comportamento para  $X_t = \frac{Z_t}{(1+\beta)^{ct}}$  com  $c \in (0, 1)$ , em que, para cada valor natural  $n$ ,  $X_t$  assume um valor maior que  $n$  com probabilidade positiva a partir de um índice  $t_0$ .

**Lema 2.4.5.** *Seja  $c \in (0, 1)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $t_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $t > t_0$  temos  $\mathbb{P}_0(X_t > n) > 0$*

**Prova:** Observe que se  $X_t = \frac{Z_t}{(1+\beta)^{ct}}$  e  $c \in (0, 1)$ , então

$$\mathbb{E}_0(X_t) = (1+\beta)^{(1-c)t} - \frac{1}{(1+\beta)^{ct}},$$

logo, como conseqüências, seguem

- (I)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0(X_t) = \infty$ ;
- (II) Dados  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ , se  $t_1 < t_2$ , então  $\mathbb{E}_0(X_{t_1}) < \mathbb{E}_0(X_{t_2})$ .

Utilizando (I), (II) e **Auxiliar 3**, nós provaremos nosso resultado.

Por (I), dado  $n \in \mathbb{N}$  há  $t_0$  tal que  $\mathbb{E}_0(X_t) \geq n + 1$ .

Pelo **Auxiliar 3**,

$$n + 1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_0(X_t \geq k). \quad (2.21)$$

Como  $\mathbb{P}_0(X_{t_0} \geq 0) = 1$  e para cada  $k$ ,  $\mathbb{P}_0(X_t \geq k) \in [0, 1]$ , segue que a menor quantidade de parcelas não nulas para (2.21) é quando

$$\mathbb{P}_0(X_{t_1} \geq k) = \dots = \mathbb{P}_0(X_{t_n} \geq k) = 1.$$

De (II), para  $t \geq t_0$ , temos que  $n + 1 \leq \mathbb{E}_0(X_t)$ .

Logo, para a desigualdade

$$n + 1 \leq \mathbb{E}_0(X_t) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_0(X_t \geq k)$$

ser satisfeita, é necessário que  $\mathbb{P}_0(X_t \geq n) > 0$ .

■

A prova do Lema 2.4.6 utiliza a teoria de martingales. Um breve resumo pode ser visto no Apêndice ???. Uma apresentação mais didática pode ser vista em [22, 28].

**Lema 2.4.6.** *A sequência  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ , com*

$$X_t = \frac{Z_t}{(1 + \beta)^t} \text{ e } \beta \in (0, 1]$$

*é um submartingale.*

**Prova:** Seja  $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_t)$ , então  $Z_t$  é  $\mathcal{F}$ -mensurável, logo  $Z_t \in \mathcal{F}_t$ .

Para mostrar que a sequência  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$  é um submartingale, precisamos verificar que  $\mathbb{E}(X_{t+1} | \mathcal{F}_t) \geq X_t$ .

Pela clara relação entre  $X_t$  e  $Z_t$ , é suficiente analisarmos  $\mathbb{E}(Z_{t+1} | \mathcal{F}_t)$ . Temos que  $Z_t \in \mathcal{F}_t$ . Seja  $\mathbb{I}(\cdot)$  a função indicadora. Segue pela linearidade da esperança condicional e o teorema da convergência monótona, itens (a) e (c) de **Auxiliar 9** respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{t+1} | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E} \left( \sum_{k=0}^{\infty} Z_{t+1} \mathbb{I}_{\{Z_t=k\}} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N Z_{t+1} \mathbb{I}_{\{Z_t=k\}} \middle| \mathcal{F}_t \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Note que para fixado  $t$ ,  $Z_{t+1}$  é uma variável aleatória não negativa com esperança finita. Além disso, se chamarmos  $S_N = \sum_{k=0}^N (Z_{t+1} \mathbb{I}_{\{Z_t=k\}})$  com  $N \in \mathbb{Z}_+$ , temos que  $S_i \leq S_j$ ,  $\forall i < j$ . Por outro lado,  $S_N$  converge em distribuição para  $Z_{t+1}$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Logo, vale o teorema da convergência monótona. Daí,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} S_N | \mathcal{F}_t \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(S_N | \mathcal{F}_t) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \mathbb{E} \left( Z_{t+1} \mathbb{I}_{\{Z_t=k\}} | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left( Z_{t+1} \mathbb{I}_{\{Z_t=k\}} | \mathcal{F}_t \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde a penúltima igualdade é obtida usando a linearidade da esperança condicional.

Usando  $Z_{t+1} = Z_t + \sum_{l=1}^{Z_t+1} \xi_t^{(l)}$ , em  $\{Z_t = k\}$ ,  $Z_{t+1} = k + \sum_{l=1}^{k+1} \xi_t^{(l)}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( Z_{t+1} \mathbb{I}_{\{Z_t=k\}} | \mathcal{F}_t \right) &= \mathbb{E} \left[ \left( k + \sum_{l=1}^{k+1} \xi_t^{(l)} \right) \mathbb{I}_{\{Z_t=k\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{I}_{\{Z_t=k\}} \mathbb{E} \left[ \left( k + \sum_{l=1}^{k+1} \xi_t^{(l)} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

onde a última igualdade é obtida usando o **Auxiliar 8**.

Usando a linearidade da esperança condicional, ver **Auxiliar 9** no item (a),

$$\mathbb{E}\left(Z_{t+1}\mathbb{I}_{\{Z_t=k\}}|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{I}_{\{Z_t=k\}} \left[ \mathbb{E}(k|\mathcal{F}_t) + \sum_{l=1}^{k+1} \mathbb{E}(\xi_t^{(l)}|\mathcal{F}_t) \right]$$

Como  $Z_t \in \mathcal{F}_t$ , segue pelo Auxiliar 7 que  $\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_t) = Z_t$ . Sendo  $\xi_t^{(l)}$  independente de  $\mathcal{F}_t$ , temos pelo Auxiliar 7 que  $\mathbb{E}(\xi_t^{(l)}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi_t^{(l)})$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(Z_{t+1}\mathbb{I}_{\{Z_t=k\}}|\mathcal{F}_t\right) &= \mathbb{I}_{\{Z_t=k\}} \left[ k + (k+1)\mathbb{E}(\xi_t^{(l)}) \right] \\ &= \mathbb{I}_{\{Z_t=k\}} [(1+\beta)k + \beta]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Por (2.22), (2.23) e (2.24)

$$\mathbb{E}(Z_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{I}_{\{Z_t=k\}} ((1+\beta)k + \beta). \tag{2.25}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}\left(\frac{Z_{t+1}}{(1+\beta)^{t+1}} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= \frac{1}{(1+\beta)^{t+1}} \mathbb{E}(Z_{t+1}|\mathcal{F}_t). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Substituindo (2.25) em (2.26) temos

$$\mathbb{E}(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = X_t + \frac{\beta}{(1+\beta)^{t+1}} \geq X_t. \quad \blacksquare$$

**Lema 2.4.7.** *Dado  $Z_0 = 0$ , a variável aleatória  $X_t = \frac{Z_t}{(1+\beta)^t}$  converge em distribuição.*

**Prova:** Pelo Lema 2.4.6, temos que  $X_t$  é um submartingale. Sabemos que

$$\mathbb{E}_0(X_t) = \mathbb{E}_0\left(\frac{Z_t}{(1+\beta)^t}\right) = \frac{(1+\beta)^t - 1}{(1+\beta)^t}$$

para todo  $t \in \mathbb{Z}_+$ . Logo,  $\sup \mathbb{E}_0(X_t) < \infty$

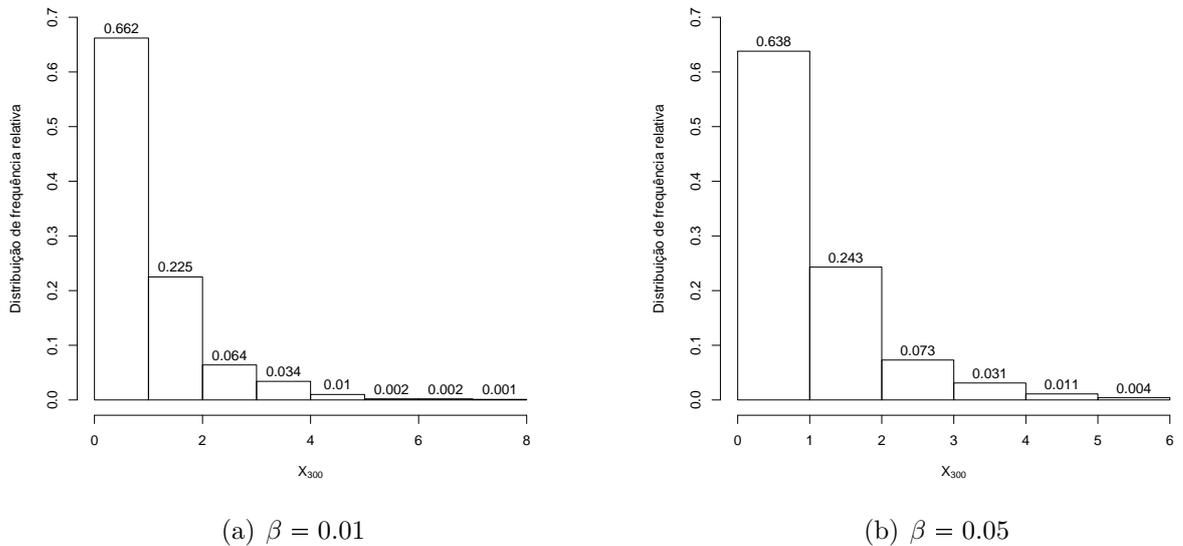
Seja

$$X_t^+ = \begin{cases} X_t, & \text{se } X_t > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como  $X_t$  assume valores em  $\mathbb{R}_+$ , temos  $\mathbb{P}_0(X_t = X_t^+) = 1$ , logo  $\sup \mathbb{E}_0(X_t^+) < \infty$ , ver Lema 2.4.3. Segue do teorema da convergência de martingale, ver **Auxiliar 10** no Apêndice ??, que  $X_t$  converge quase certamente, para uma variável aleatória  $X$  com  $\mathbb{E}_0(|X|) < \infty$ .

■

**Figura 5** – *Distribuição empírica da variável aleatória  $X_{300}$  para duas amostras de tamanho 1000, onde  $X_0 = 0$ . Em (a) consideramos  $\beta = 0.01$  e em (b) consideramos  $\beta = 0.05$ .*



Fonte: Autoria Própria.

Na Figura 5, ilustramos a distribuição empírica da variável aleatória  $X_t$ . Para isto, realizamos uma simulação computacional que imita o processo  $X$ , considerando  $\beta \in \{0.01, 0.05\}$ , iniciando em  $X_0 = 0$  e finalizando no passo de tempo  $t = 300$ , isto é, em  $X_{300}$ . Escolhemos valores pequenos de  $\beta$ , porque o processo  $Z$  cresce muito rápido, com velocidade  $(1 + \beta)^t$ , a qual é obtida com base na convergência quase certa da variável aleatória  $X_t$ , que foi mostrada no Lema 2.4.7, implicando que (2.6) é satisfeita. Tal fato dificulta uma análise numérica para maiores valores do parâmetro  $\beta$ . De maneira semelhante, escolher um valor  $t$  grande pode dificultar a análise numérica do processo  $Z$ . Como nossa intenção com esta simulação é apenas ilustrativa, escolher  $t = 300$  é suficiente. Em seguida, realizamos 1000 réplicas do experimento que imita o processo  $X$ , para cada  $\beta$  e  $t$  considerados.

Para  $X_t$ , segue do Lema 2.4.3 que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0(X_t) = 1$ . Logo,  $X_t$  não pode convergir para uma variável aleatória geométrica, pois esta seria uma variável aleatória degene-

rada concentrada em 1, o que não é verdade, pois também do Lema 2.4.3 temos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} Var_0(X_t) = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$ .

## 2.5 MONOTONICIDADE DE $\mathbf{N}_\beta$

O conceito de monotonicidade é bastante útil [11, 12]. Em particular, para provar a ergodicidade em processos de partículas interagentes, como ocorre nos processos de contato [1, 5] e Stavskaya [4, 11].

Ao menos pelo que sabemos, este conceito de monotonicidade não foi estabelecido e ou proposto para a nossa classe de operadores, a saber: sistemas de partículas interagentes com comprimento variável. Ainda não será. Nossa proposta é estabelecer tal conceito para o operador  $\mathbf{N}_\beta$ . Sendo assim, estamos dando um primeiro passo para uso do conceito de monotonicidade nesta nova classe.

Sejam  $W_1 = w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m}$ ,  $W_2 = w_{j_1} w_{j_2} \dots w_{j_n}$ ,  $\dots$ ,  $W_k = w_{r_1} w_{r_2} \dots w_{r_p}$ . Definimos a concatenação das palavras  $W_1, \dots, W_k$ , e denotamos por  $concat(W_1, \dots, W_k)$ , a palavra  $w_{i_1} \dots w_{i_m} w_{j_1} \dots w_{j_n} \dots w_{r_1} \dots w_{r_p}$ .

Seja  $W = w_1 w_2 \dots w_N$ . Para nosso estudo, daremos atenção apenas a palavras aleatórias

$$\Delta_W = \{concat(V_1, \dots, V_N) : V_i \in \{w_i, w_i \oplus\}, \text{ para } i = 1, \dots, N\}.$$

Claro que fixados  $N$  e os  $w_i$ 's,  $\Delta_W$  tem  $2^N$  elementos.

Agora, falaremos de ordenação parcial em  $\{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$ . Adotaremos  $\ominus < \oplus$ . Sejam  $w, v \in \{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$ , diremos que  $w$  precede  $v$  e denotamos  $w \prec v$  se  $w_i \leq v_i \forall i \in \mathbb{Z}$ . Um conjunto mensurável  $\text{Sup} \subset \{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$  é dito *superior* se

$$(w \in \text{Sup}, w \prec v) \implies v \in \text{Sup}.$$

Sejam  $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ . Dizemos que  $\mu$  precede  $\nu$  e escrevemos  $\mu \prec \nu$ , se  $\mu(\text{Sup}) \leq \nu(\text{Sup})$  para qualquer conjunto superior  $\text{Sup}$ . Assim, introduzimos uma ordem parcial em  $\mathcal{M}$ . Diremos que o operador  $\mathbf{N}_\beta$  é monótono se  $\mu \prec \nu$  implica  $\mu \mathbf{N}_\beta \prec \nu \mathbf{N}_\beta$ .

**Lema 2.5.1.** *Se  $w \prec v$ , então  $\delta_w \prec \delta_v$ .*

**Prova:** Para qualquer  $\delta$ -medida concentrada em  $w$  e conjunto superior  $\text{Sup}$ ,

$$\delta_v(\text{Sup}) = \begin{cases} 1, & \text{se } v \in \text{Sup}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela definição de  $\text{Sup}$ , se  $\delta_w(\text{Sup}) = 1$ , então  $\delta_v(\text{Sup}) = 1$ . Logo,

$$\delta_w \prec \delta_v.$$

■

**Lema 2.5.2.** *Se  $w \prec v$ , então  $\delta_w \mathbf{N}_\beta \prec \delta_v \mathbf{N}_\beta$ .*

**Prova:** Dados  $N \in \mathbb{N}$  e  $i \in \mathbb{Z}$ , tomamos as palavras  $W_i = w_{(i-1)N+1} \dots w_{iN}$  em  $w$  e  $V_i = v_{(i-1)N+1} \dots v_{iN}$  em  $v$ .

Note que  $w = \lim_{M \rightarrow \infty} \text{concat}(W_{-M}, \dots, W_M)$  e  $v = \lim_{M \rightarrow \infty} \text{concat}(V_{-M}, \dots, V_M)$ . Além disso, como  $w \prec v$ , então  $W_i \leq V_i$  para cada valor inteiro  $i$ . Denotamos  $W_i \tilde{\mathbf{N}}_\beta$  (respectivamente  $V_i \tilde{\mathbf{N}}_\beta$ ) a ação de  $\tilde{\mathbf{N}}_\beta$  em  $W_i$  (respectivamente em  $V_i$ ). Informalmente falando, o operador  $\mathbf{N}_\beta$  é o operador de nascimento que atua no processo  $\mathbf{VS}$ , enquanto o operador  $\tilde{\mathbf{N}}$  é o análogo do operador nascimento que atua em palavras aleatórias. A palavra aleatória  $W_i \tilde{\mathbf{N}}_\beta$ , toma valores em

$$\Delta_{W_i \tilde{\mathbf{N}}_\beta} = \{\text{concat}(U_1, \dots, U_N) : U_j \in \{w_{(i-1)N+j}, w_{(i-1)N+j} \oplus\}, \text{ para } j = 1, \dots, N\}.$$

Logo, para  $j = 1, \dots, N$

$$\mathbb{P}(W_i \tilde{\mathbf{N}}_\beta = \text{concat}(U_1, \dots, U_N)) = \binom{N}{k} \beta^k (1 - \beta)^{N-k},$$

onde  $k$  indica a quantidade de  $U_j = w_{(i-1)N+j} \oplus$ . Ou seja,  $\mathbb{P}(U_j = w_{(i-1)N+j} \oplus) = \beta$  e  $\mathbb{P}(U_j = w_{(i-1)N+j}) = (1 - \beta)$ .

Considere o seguinte acoplamento entre  $W_i \tilde{\mathbf{N}}_\beta$  e  $V_i \tilde{\mathbf{N}}_\beta$ ,

$$\begin{cases} (\text{concat}(U_1, \dots, U_N) : U_j \in \{w_{(i-1)N+j}, w_{(i-1)N+j} \oplus\}, \text{ para } j = 1, \dots, N), \\ (\text{concat}(Q_1, \dots, Q_N) : Q_j \in \{v_{(i-1)N+j}, v_{(i-1)N+j} \oplus\}, \text{ para } j = 1, \dots, N), \end{cases}$$

onde para cada posição  $j$  teremos associada uma variável aleatória com distribuição Bernoulli com parâmetro  $\beta$  de sucesso, independente uma das outras. Se ela for igual a

0, então  $U_j = w_{(i-1)N+j}$  e  $Q_j = v_{(i-1)N+j}$ . No outro caso, se a variável aleatória assumir valor 1, então  $U_i = w_{(i-1)N+j} \oplus$  e  $Q_i = v_{(i-1)N+j} \oplus$ . Logo,

$$\mathbb{P}(W_i \tilde{\mathbf{N}}_\beta \leq V_i \tilde{\mathbf{N}}_\beta) = 1.$$

Sendo isto verdade para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , temos

$$\mathbb{P}\left(\text{concat}(W_{-M} \tilde{\mathbf{N}}_\beta, \dots, W_M \tilde{\mathbf{N}}_\beta) \leq \text{concat}(V_{-M} \tilde{\mathbf{N}}_\beta, \dots, V_M \tilde{\mathbf{N}}_\beta)\right) = 1, \quad (2.27)$$

para cada valor natural  $M$ .

Como  $\lim_{M \rightarrow \infty} \text{concat}(W_{-M} \tilde{\mathbf{N}}_\beta, \dots, W_M \tilde{\mathbf{N}}_\beta)$  e  $\lim_{M \rightarrow \infty} \text{concat}(V_{-M} \tilde{\mathbf{N}}_\beta, \dots, V_M \tilde{\mathbf{N}}_\beta)$  tem distribuição  $\delta_w \mathbf{N}_\beta$  e  $\delta_v \mathbf{N}_\beta$  respectivamente, segue de (2.27) que

$$\delta_w \mathbf{N}_\beta \prec \delta_v \mathbf{N}_\beta.$$

■

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sejam  $f \in \mathcal{N}^n$  o conjunto das distribuições em  $\{\oplus, \ominus\}^n$  e  $\mu \in \mathcal{M}$ . Dizemos que  $f$  é uma *restrição* de  $\mu$  às componentes  $s_{i_1}, \dots, s_{i_n}$ , onde  $\{i_1, \dots, i_n\} \subset \mathbb{Z}$  se

$$f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) = \mu(s_{i_1} = a_{i_1}, \dots, s_{i_n} = a_{i_n}), \quad \forall (a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \in \{\oplus, \ominus\}^n. \quad (2.28)$$

Denotamos a  $f$  que satisfaz (2.28) por

$$\text{restrict}(\mu|_{s_{i_1}, \dots, s_{i_n}}).$$

Agora, definiremos uma ordenação parcial para palavras aleatórias. Seja  $\{\oplus, \ominus\}^n$ . Tomamos  $W, V \in \{\oplus, \ominus\}^n$ . Dizemos que  $W$  precede  $V$  se  $w_i \leq v_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Seja  $\widetilde{\text{Sup}} \subset \{\oplus, \ominus\}^n$ , ele é dito superior em  $\{\oplus, \ominus\}^n$  se

$$(W \in \widetilde{\text{Sup}}, W \text{ precede } V) \implies V \in \widetilde{\text{Sup}}.$$

Sejam  $f, g \in \mathcal{N}^n$ . Dizemos que  $f$  precede  $g$ , e escrevemos  $f \prec g$ , se  $f(\widetilde{\text{Sup}}) \leq g(\widetilde{\text{Sup}})$  para qualquer conjunto superior  $\widetilde{\text{Sup}}$ .

**Lema 2.5.3.** *Se  $\mu \prec \nu$ , então  $\text{restrict}(\mu|_{s_{i_1}, \dots, s_{i_n}}) \prec \text{restrict}(\nu|_{s_{i_1}, \dots, s_{i_n}})$ .*

**Prova:** Considere  $\text{Sup}$  em  $\{\oplus, \ominus\}^{\mathbb{Z}}$ , ver seção 2.5. Para  $w \in \Omega$ , sejam  $\text{Proj}_{i_1, \dots, i_n} : \Omega \rightarrow \{\oplus, \ominus\}^n$ , onde  $\text{Proj}_{i_1, \dots, i_n}(w) = w_{i_1} \dots w_{i_n}$ . Definimos

$$\text{Proj}_{i_1, \dots, i_n}(\text{Sup}) = \bigcup_{w \in \text{Sup}} \{\text{Proj}_{i_1, \dots, i_n}(w)\}.$$

Note que, por construção,  $\text{Proj}_{i_1, \dots, i_n}(\text{Sup})$  é um conjunto superior em  $\{\oplus, \ominus\}^n$ .

Para cada  $v \in \text{Sup}$ , temos  $\text{Proj}_{i_1, \dots, i_n}(v) = v_{i_1} \dots v_{i_n}$ . Sejam  $f, g \in \mathcal{N}^n$  tais que  $f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) = \mu(v \in \text{Sup} : v_{i_1} = a_{i_1}, \dots, v_{i_n} = a_{i_n})$  e  $g(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) = \nu(v \in \text{Sup} : v_{i_1} = a_{i_1}, \dots, v_{i_n} = a_{i_n})$ , onde  $a_{i_j} \in \{\oplus, \ominus\}$ , com  $j = 1, \dots, n$ . Como isto é válido para cada  $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n}) \in \text{Proj}_{i_1, \dots, i_n}(\text{Sup})$  e  $\mu(\text{Sup}) \leq \nu(\text{Sup})$ , segue de (2.28)

$$\begin{aligned}
\text{restrict}(\mu|\text{Sup}) &= \sum_{(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \in \text{Proj}_{i_1, \dots, i_n}(\text{Sup})} \text{restrict}(\mu|s_{i_1}, \dots, s_{i_n}) \\
&= \sum_{(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \in \text{Proj}_{i_1, \dots, i_n}(\text{Sup})} f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \\
&= \sum_{(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \in \text{Proj}_{i_1, \dots, i_n}(\text{Sup})} \mu(v \in \text{Sup} : v_{i_1} = a_{i_1}, \dots, v_{i_n} = a_{i_n}) \\
&\leq \sum_{(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \in \text{Proj}_{i_1, \dots, i_n}(\text{Sup})} \nu(v \in \text{Sup} : v_{i_1} = a_{i_1}, \dots, v_{i_n} = a_{i_n}) \\
&= \sum_{(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \in \text{Proj}_{i_1, \dots, i_n}(\text{Sup})} g(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \\
&= \sum_{(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \in \text{Proj}_{i_1, \dots, i_n}(\text{Sup})} \text{restrict}(\nu|s_{i_1}, \dots, s_{i_n}) \\
&= \text{restrict}(\nu|\text{Sup}).
\end{aligned}$$

■

**Lema 2.5.4.** *Se  $\mu \prec \nu$ , então  $\mu\mathbf{N}_\beta \prec \nu\mathbf{N}_\beta$ .*

**Prova:** Como  $\mu \prec \nu$ , pelo Lema 2.5.3, podemos tomar duas palavras aleatórias  $X_i = x_{i_1} \dots x_{i_n}$  e  $Y_i = y_{i_1} \dots y_{i_n}$  com distribuição  $\text{restrict}(\mu|s_{i_1}, \dots, s_{i_n}) \prec \text{restrict}(\nu|s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ , respectivamente. Logo,  $\mathbb{P}(X_i \leq Y_i) = 1$ .

Neste caso, usando as ideias apresentadas na prova do Lema 2.5.2, podemos concluir

$$\mathbb{P}(X_i \tilde{\mathbf{N}}_\beta \leq Y_i \tilde{\mathbf{N}}_\beta) = 1. \quad (2.29)$$

Como isto vale para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , temos

$$\mathbb{P}\left(\text{concat}(X_{-M} \tilde{\mathbf{N}}_\beta, \dots, X_M \tilde{\mathbf{N}}_\beta) \leq \text{concat}(Y_{-M} \tilde{\mathbf{N}}_\beta, \dots, Y_M \tilde{\mathbf{N}}_\beta)\right) = 1, \quad (2.30)$$

para cada valor natural  $M$ .

Como  $\lim_{M \rightarrow \infty} \text{concat}(X_{-M}\tilde{\mathbf{N}}_\beta, \dots, X_M\tilde{\mathbf{N}}_\beta)$  e  $\lim_{M \rightarrow \infty} \text{concat}(Y_{-M}\tilde{\mathbf{N}}_\beta, \dots, Y_M\tilde{\mathbf{N}}_\beta)$  tem distribuição  $\mu\mathbf{N}_\beta$  e  $\nu\mathbf{N}_\beta$  respectivamente, concluímos que

$$\mu\mathbf{N}_\beta \prec \nu\mathbf{N}_\beta.$$

■

## 2.6 PROVA DO TEOREMA 2.2.1

**Proposição 2.6.1.** *Sejam  $\mu \in \mathcal{M}_U$  e  $\mu_t = \mu\mathbf{N}_\beta^t$ . Logo,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t = \delta_{\oplus z}.$$

**Prova:** A prova será feita por indução em  $t$ . Provaremos que

$$\mu_t(\oplus) = \frac{\mu(\oplus) + \beta \sum_{k=0}^{t-1} (1 + \beta)^k}{(1 + \beta)^t}.$$

**Base de indução:** Para  $t = 1$ ,  $\mu_1(\oplus) = \frac{\mu(\oplus) + \beta}{1 + \beta}$ .

**Passo de indução:** Para  $t = n - 1$ ,

$$\mu_{n-1}(\oplus) = \frac{\mu(\oplus) + \beta \sum_{k=0}^{n-2} (1 + \beta)^k}{(1 + \beta)^{n-1}}.$$

**Hipótese de indução:** Seja  $t = n$ , então

$$\mu_n(\oplus) = \frac{\mu_{n-1}(\oplus) + \beta}{1 + \beta} = \frac{\frac{\mu(\oplus) + \beta \sum_{k=0}^{n-2} (1 + \beta)^k}{(1 + \beta)^{n-1}} + \beta}{1 + \beta} = \frac{\mu(\oplus) + \beta \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \beta)^k}{(1 + \beta)^n}.$$

Logo,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(\oplus) = 1$ .

■

**Proposição 2.6.2.** *Seja  $\mu \in \mathcal{M}$ , então para  $\beta > 0$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu\mathbf{N}_\beta = \delta_{\oplus z}.$$

**Prova:** Pela proposição 2.6.1, se  $\mu \in \mathcal{M}_U$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \mathbf{N}_\beta = \delta_{\oplus z}.$$

Em particular,  $\delta_{\ominus z} \in \mathcal{M}_U$ . Pelo Lema 2.5.4,  $\mathbf{N}_\beta$  é monótono. Logo, como  $\delta_{\ominus z} \prec \mu$ ,  $\forall \mu \in \mathcal{M}$ , segue que  $\delta_{\ominus z} \mathbf{N}_\beta \prec \mu \mathbf{N}_\beta$ . Assim,

$$\delta_{\ominus z} \mathbf{N}_\beta^t \prec \mu \mathbf{N}_\beta^t.$$

Mas pela proposição 2.6.1,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{\ominus z} \mathbf{N}_\beta = \delta_{\oplus z},$$

implicando que  $\delta_{\oplus z} \prec \lim_{t \rightarrow \infty} \mu \mathbf{N}_\beta^t$ . Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \mathbf{N}_\beta^t = \delta_{\oplus z}.$$

■

**Prova do teorema 2.2.1:** Seja  $\mu \in \mathcal{M}$ . No caso  $\alpha = 0$ , então apenas o operador  $\mathbf{N}_\beta$  atua sobre a medida  $\mu$ , isto é

$$\mu \mathbf{V} \mathbf{S}^t = \mu \mathbf{N}_\beta^t.$$

Logo, a convergência do processo  $\mu \mathbf{V} \mathbf{S}^t$  para  $\delta_{\oplus z}$  com  $t \rightarrow \infty$  e  $\alpha = 0$  segue da Proposição 2.6.2. Em adição, o Teorema 2.2.2 assegura a convergência de  $\mu \mathbf{V} \mathbf{S}^t$  para  $\delta_{\oplus z}$  com  $t \rightarrow \infty$  nos casos em que  $\alpha > 0$ .

Agora, para mostrar a velocidade de convergência do processo, note que, se  $\alpha = 0$ , então a velocidade de convergência será maior que o caso em que  $\alpha > 0$ . Assim, basta provarmos que a velocidade do processo com  $\alpha = 0$  é geométrica.

Para  $\alpha = 0$ , mostraremos a velocidade de convergência do processo  $\delta_{\ominus z} \mathbf{V} \mathbf{S}^t$ . Como o operador  $\mathbf{N}_\beta$  é monótono, então é suficiente mostrarmos a velocidade de convergência quando  $\mu = \delta_{\ominus z}$ . Neste caso, todo  $Z_t^{ii+1}$  tem condição inicial  $Z_0^{ii+1} = 0$ . Assim, como para cada  $i$ ,  $Z^{ii+1}$  evolui de forma independente, é suficiente verificarmos a velocidade de  $Z_t^{01}$ , a qual denotamos simplesmente  $Z_t$  com  $Z_0 = 0$ .

Pelo Lema 2.4.7,  $X_t$  converge quase certamente para uma variável aleatória  $X$ . Também,  $X$  não é negativa, logo, dado  $\epsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_t - X| > \epsilon) = 0,$$

implicando que o processo  $\mathbf{V} \mathbf{S}$  com  $\alpha = 0$  cresce com velocidade geométrica.

■

## 2.7 PROVA DO TEOREMA 2.2.2

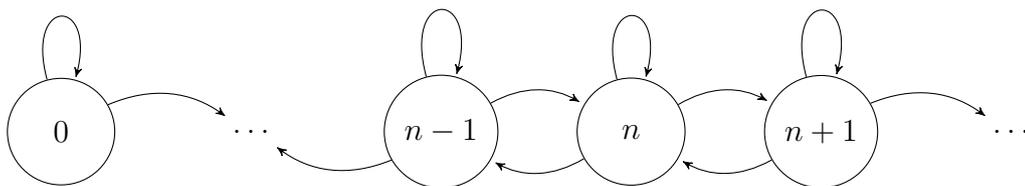
Na seção 2.3, nós definimos o processo  $Z$ , o qual é usado para associar o seu estado com o número de componentes no estado mais entre duas componentes no estado menos no processo  $\mathbf{VS}$ . Agora, definiremos um outro processo auxiliar,  $L$ , o qual limita inferiormente estocasticamente o processo  $Z$ . Desta forma, ao estudar condições para as quais o processo  $L$  é transiente, também poderemos verificar se o processo  $Z$  também será transiente. Tal fato nos ajudará a provar a convergência do processo  $\mathbf{VS}$ .

Definiremos um processo de nascimento e morte,  $(L_t^1)_{t \geq 0}$  com as seguintes probabilidades de transição

$$\mathbb{P}(L_{t+1}^1 = m | L_t^1 = n) = \begin{cases} \mathbb{P}(Z_{t+1} = 1 | Z_t = 0), & \text{se } m = 1 \text{ e } n = 0, \\ \mathbb{P}(Z_{t+1} = 0 | Z_t = 0), & \text{se } m = n = 0, \\ \mathbb{P}(Z_{t+1} = n - 1 | Z_t = n), & \text{se } m = n - 1 \text{ e } n > 0; \\ \mathbb{P}(Z_{t+1} = n | Z_t = n), & \text{se } m = n; \\ \sum_{k=n+1}^{2n+1} \mathbb{P}(Z_{t+1} = k | Z_t = n), & \text{se } m = n + 1 \text{ e } n > 0; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (2.31)$$

O processo  $L^1$  tem seu diagrama de transição, apresentado na Figura 6.

**Figura 6 – Diagrama de transição do processo  $L^1$ .**



Fonte: Autoria Própria.

Usando as probabilidades do processo  $Z$  em (2.8), podemos descrever exatamente as probabilidades do processo  $L^1$  por

$$\mathbb{P}(L_{t+1}^1 = m | L_t^1 = n) = \begin{cases} \beta(1 - \alpha), & \text{se } m = 1, n = 0; \\ \alpha\beta + (1 - \beta), & \text{se } m = n = 0; \\ \alpha(1 - \beta)^{n+1}, & \text{se } m = n - 1 \text{ e } n > 0; \\ (n + 1)\beta(1 - \beta)^n\alpha + (1 - \beta)^{n+1}(1 - \alpha), & \text{se } m = n > 0; \\ 1 - (1 - \beta)^n[(1 - \beta) + (n + 1)\alpha\beta], & \text{se } m = n + 1 \text{ e } n > 0; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (2.32)$$

onde  $\mathbb{P}(L_{t+1}^1 = n + 1 | L_t^1 = n) = 1 - \mathbb{P}(L_{t+1}^1 = n | L_t^1 = n) - \mathbb{P}(L_{t+1}^1 = n - 1 | L_t^1 = n)$ .

**Lema 2.7.1.** *Sejam  $\beta \in (0, 1]$  e  $\alpha \in (0, 1)$ . Então o processo  $L^1$  é transiente.*

**Prova:** Denotaremos as probabilidades de transição de  $(L_t^1)_{t \in \mathbb{Z}}$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_{t+1}^1 = 0 | L_t^1 = 0) &= 1 - p_0 & \mathbb{P}(L_{t+1}^1 = n + 1 | L_t^1 = n) &= p_n \\ \mathbb{P}(L_{t+1}^1 = 1 | L_t^1 = 0) &= p_0 & \mathbb{P}(L_{t+1}^1 = n - 1 | L_t^1 = n) &= q_n \\ \mathbb{P}(L_{t+1}^1 = n | L_t^1 = n) &= 1 - p_n - q_n \end{aligned}$$

É suficiente mostrar que o processo  $(L_t^1)_{t \in \mathbb{Z}_+}$  é transiente. De acordo com o **Auxiliar 4**, basta verificarmos quando a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k}$  é convergente. Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{q_1 \cdots q_{n+1}}{p_1 \cdots p_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1}}{p_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n(1 - \beta) \frac{n(n+3)}{2}}{1 - (1 - \beta)^n[(1 - \beta) + (n + 1)\alpha\beta]}.$$

Note que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^n(1 - \beta) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} 1 - (1 - \beta)^n[(1 - \beta) + (n + 1)\alpha\beta] = 1$ , logo, concluímos que o processo  $L^1$  é transiente em  $\mathbb{Z}_+$ . ■

Dadas duas medidas de probabilidade,  $\mu$  e  $\nu$ , um acoplamento entre estas medidas é um par de variáveis aleatórias  $(X, Y)$  definido em um espaço de probabilidade, onde a distribuição marginal de  $X$  é  $\mu$  e a distribuição marginal de  $Y$  é  $\nu$ , ver [29].

Se realizarmos um acoplamento entre os processos  $L^1$  e  $Z$  iniciando em  $L_0^1 = Z_0$ , então um dos casos ocorre na atualização do passo de tempo: (a) se o processo  $Z$  decresce uma unidade, então o processo  $L^1$  decresce uma unidade; (b) se o processo  $Z$  permanece

no mesmo estado, então o processo  $L^1$  permanece no mesmo estado; (c) se o processo  $L^1$  cresce uma unidade, então o processo  $Z$  cresce pelo menos uma unidade. Logo, temos que  $\mathbb{P}(L_t^1 \leq Z_t) = 1$ . A seguir, nós formalizamos o acoplamento entre os processo  $L^1$  e  $Z$ .

Seja  $U_1, U_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas onde  $U_t$  tem distribuição uniforme em  $[0, 1]$ . Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}_+$ , nós definimos o acoplamento para os processos  $(L_t^1)_{t \in \mathbb{Z}_+}$  e  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ :

$$\begin{cases} (L_0^1, Z_0) = (m, n) \\ (L_t^1, Z_t) = (F^L(L_{t-1}^1, U_t, m), F^Z(Z_{t-1}, U_t, n)), \end{cases} \quad (2.33)$$

onde  $m$  e  $n$  pertencem a  $\mathbb{Z}_+$  e

$$F^L(L_t^1, U_{t+1}, m) = \begin{cases} m - 1, & \text{se } U_{t+1} \in (0, p_{m,m-1}^{L^1}], \\ m, & \text{se } U_{t+1} \in (p_{m,m-1}^{L^1}, p_{m,m-1}^{L^1} + p_{m,m}^{L^1}], \\ m + 1, & \text{se } U_{t+1} \in (p_{m,m-1}^{L^1} + p_{m,m}^{L^1}, 1], \\ 0, & \text{nos outros casos,} \end{cases} \quad (2.34)$$

onde  $p_{i,j}^{L^1} = \mathbb{P}(L_{t+1}^1 = j | L_t^1 = i)$  e

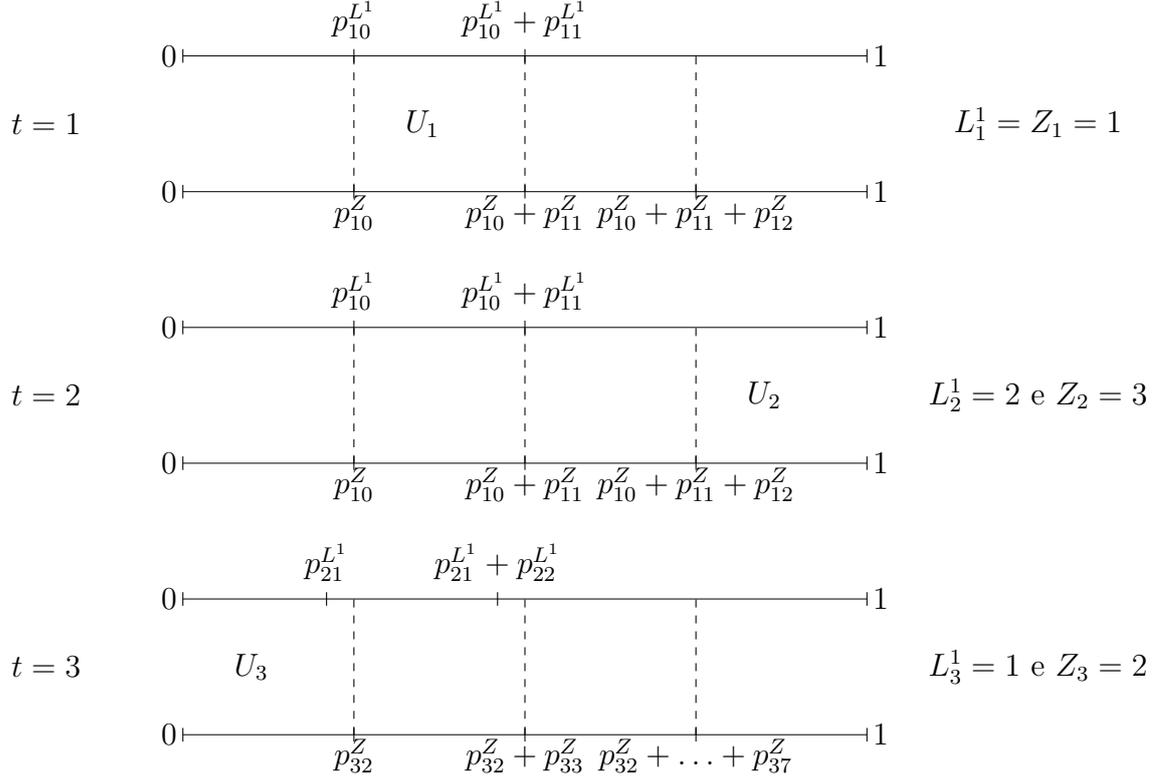
$$F^Z(Z_t, U_{t+1}, n) = \begin{cases} n - 1, & \text{se } U_{t+1} \in (0, p_{n,n-1}^Z], \\ n, & \text{se } U_{t+1} \in (p_{n,n-1}^Z, p_{n,n}^Z], \\ n + 1, & \text{se } U_{t+1} \in \left( \sum_{k=n-1}^n p_{n,k}^Z, \sum_{k=n-1}^{n+1} p_{n,k}^Z \right], \\ \vdots & \\ l, & \text{se } U_{t+1} \in \left( \sum_{k=n-1}^{l-1} p_{n,k}^Z, \sum_{k=b-1}^l p_{n,k}^Z \right] \\ & \text{para } l < 2n + 1, \\ \vdots & \\ 2n + 1, & \text{se } U_{t+1} \in \left( \sum_{k=n-1}^{2n} p_{n,k}^Z, 1 \right], \\ 0, & \text{nos outros casos,} \end{cases}$$

onde  $p_{i,j}^Z = \mathbb{P}(Z_{t+1} = j | Z_t = i)$

A Figura 7 ilustra um acoplamento entre os processos  $L^1$  e  $Z$ , com ambos os processos iniciando no estado 1, isto é,  $L_0^1 = Z_0 = 1$ . Na transição para  $t = 1$ ,  $U_1 \in (p_{10}^{L^1}, p_{10}^{L^1} + p_{11}^{L^1}]$

e  $U_1 \in (p_{10}^Z, p_{10}^Z + p_{11}^Z]$ , logo  $L_1^1 = Z_1 = 1$ . Na transição para  $t = 2$ ,  $U_2 \in (p_{10}^{L^1} + p_{11}^{L^1}, 1]$  e  $U_2 \in (p_{10}^Z + p_{11}^Z + p_{12}^Z, 1]$ , logo  $L_2^1 = 2$  e  $Z_2 = 3$ . Na transição para  $t = 3$ ,  $U_3 \in (0, p_{21}^{L^1}]$  e  $U_3 \in (0, p_{32}^Z]$ , logo  $L_3^1 = 1$  e  $Z_3 = 2$ .

**Figura 7 – Ilustração de uma possível realização em um acoplamento entre os processos  $L^1$  e  $Z$ , considerando  $L_0^1 = Z_0 = 1$ .**



Fonte: Autoria Própria.

**Lema 2.7.2.** *Seja  $Z$  o processo definido em (2.8). Segue que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Z_0}(Z_t \rightarrow \infty) = 1.$$

**Prova:** Pelo Lema 2.7.1, temos que o processo  $L^1$  é transiente. Como consequência, para qualquer condição inicial  $i$ , temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_i(L_t^1 \rightarrow \infty) = 1.$$

Segue do acoplamento entre os processos  $L^1$  e  $Z$  que  $\mathbb{P}(L_t^1 \leq Z_t) = 1$  para todo  $t \in \mathbb{Z}_+$  e  $L_0^1 = Z_0$ . Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Z_0}(Z_t \rightarrow \infty) = 1.$$

■

### 2.7.1 Sobre Medidas Uniformes

Nesta subseção, nós apresentaremos, na Proposição 2.7.1, um resultado sobre a convergência do processo  $\mu VS^t$  quando a medida inicial,  $\mu$ , é uniforme. Neste caso, tomando  $\alpha < 1$ ,  $\beta > 0$  e  $\mu \in \mathcal{M}_U$  tal que  $\mu(E_{ij}) > 0$ , então o processo  $\mu VS^t$  sempre converge para a medida  $\delta_{\oplus z}$ . Uma prova para qualquer  $\mu \in \mathcal{M}$  poderá ser vista no final da subseção 2.7.2

**Lema 2.7.3.** *Seja  $\mu \in \mathcal{M}_U$ . Se  $\mu(\oplus) > 0$  e  $\mu VS^t N_\beta(\oplus\oplus) < \frac{\beta}{\alpha(1+\beta)}$ , então*

$$\mu VS^t(\ominus) > \mu VS^{t+1}(\ominus).$$

**Prova:** Vamos analisar a densidade de menos no tempo  $t+1$ , isto é,  $\mu VS^{t+1}(\ominus)$ . Para esta densidade, temos

$$\mu VS^{t+1}(\ominus) = \mu VS^t(N_\beta M_\alpha)(\ominus).$$

Sob ação do operador  $N_\beta$ ,

$$\mu VS^t N_\beta(\ominus) = \frac{\mu VS^t(\ominus)}{1+\beta},$$

onde  $(1+\beta)$  é obtido do fato que, após ação do operador  $N_\beta$ , uma fração  $\beta$  de componentes no estado mais surge no sistema. Em seguida, após a ação do operador  $M_\alpha$ , uma proporção  $\alpha$  das componentes no estado mais que são vizinhas mais próximas à direita de componentes no estado menos é diminuída no sistema. Daí,

$$\mu VS^{t+1}(\ominus) = \mu VS^t(N_\beta M_\alpha)(\ominus) = \frac{\mu VS^t(\ominus)}{(1+\beta)(1-\alpha\mu VS^t N_\beta(\oplus\oplus))}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \mu VS^t(\ominus) - \mu VS^{t+1}(\ominus) > 0 &\Leftrightarrow \mu VS^t(\ominus) - \frac{\mu VS^t(\ominus)}{(1+\beta)(1-\alpha\mu VS^t N_\beta(\oplus\oplus))} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu VS^t(\ominus)(\beta - \alpha\mu VS^t N_\beta(\oplus\oplus) - \alpha\beta\mu VS^t N_\beta(\oplus\oplus))}{(1+\beta)(1-\alpha\mu VS^t N_\beta(\oplus\oplus))} > 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Como o denominador em (2.35) é sempre positivo, analisemos seu numerador. Note que,

$$\begin{aligned} \beta - \alpha\mu VS^t N_\beta(\oplus\oplus) - \alpha\beta\mu VS^t N_\beta(\oplus\oplus) > 0 &\Leftrightarrow \beta - \alpha\mu VS^t N_\beta(\oplus\oplus)(1+\beta) > 0 \\ &\Leftrightarrow \mu VS^t N_\beta(\oplus\oplus) < \frac{\beta}{\alpha(1+\beta)}. \end{aligned}$$



**Proposição 2.7.1.** *Sejam  $\alpha < 1$  e  $\beta > 0$  e  $\mu \in \mathcal{M}_U$ . Então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \mathbf{VS}^t = \delta_{\oplus z}.$$

**Prova:** Seja  $\mu \in \mathcal{M}_U$  com  $\mu(E_{ij}) > 0$ . O Lema 2.7.2 mostra que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Z_0}(Z_t \rightarrow \infty) = 1.$$

Daí, com probabilidade 1, existe  $T_0$  finito tal que para todo  $T > T_0$  temos

$$T > T_0 \implies \mu \mathbf{VS}^t \mathbf{N}_\beta(\oplus \ominus) < \frac{\beta}{\alpha(1 + \beta)}.$$

Assim, pelo Lema 2.7.3

$$\mu_{T_0}(\ominus) > \mu_{T_0+1}(\ominus) > \mu_{T_0+2}(\ominus) > \dots \quad (2.36)$$

Iniciando da configuração *todos menos*, a Figura 8 ilustra uma possível realização, com probabilidade positiva, da quantidade de mais entre duas componentes. Como cada  $Z^{ii+1}$  é transiente e independente um do outro, dado valor  $M$ , existe  $T_0$  tal que  $\mathbb{E}_0(Z_{T_0}^{ii+1}) > M$  e isto ocorre para toda posição  $i$ . Portanto, se  $Z_0^{ii+1} = 0$ , a quantidade de mais entre dois menos é sempre maior que  $M$  para algum  $T_0$ . Logo, a densidade de menos em  $\delta_{\ominus z} \mathbf{VS}^{T_0}$  será menor que  $1/M$ .

É bem conhecido do cálculo que esta sequência monótona e limitada em (2.36) é tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(\ominus) = 0.$$



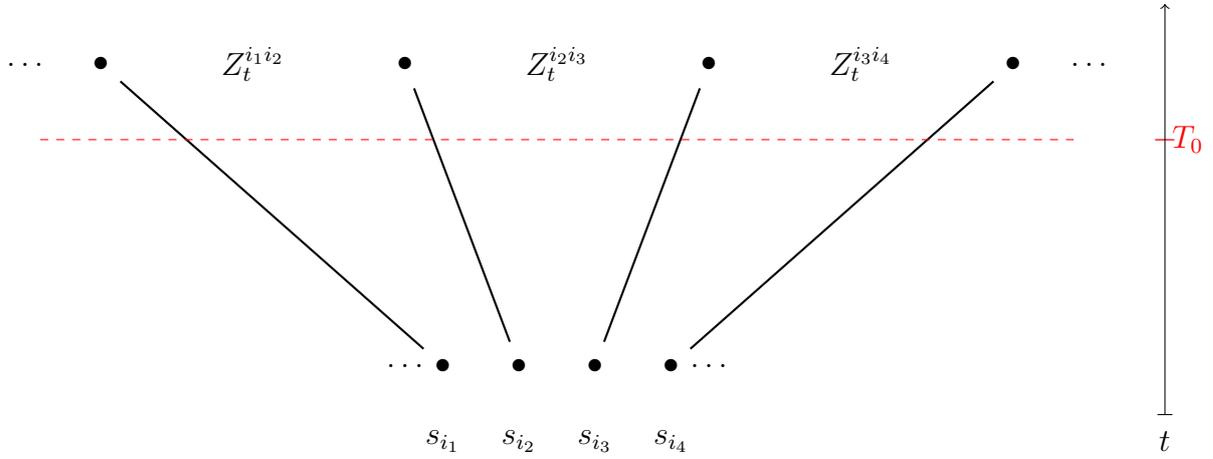
## 2.7.2 Alguns Resultados Limites para Palavras Aleatórias

Denotamos  $\widetilde{\mathbf{VS}}$ , o análogo do operador  $\mathbf{VS}$  atuando em palavras. Definimos

$$\widetilde{\mathbf{VS}} = \widetilde{\mathbf{N}}_\beta \circ \widetilde{\mathbf{M}}_\alpha,$$

onde a ação  $\widetilde{\mathbf{N}}_\beta$  já foi descrita na seção 2.5 e  $\widetilde{\mathbf{M}}_\alpha$  atua em palavras da mesma forma que  $\mathbf{M}_\alpha$  foi descrito. Denotamos

Figura 8 – Associação dos processos  $Z_t^{i_i i_{i+1}}$  em um fragmento da configuração todas menos.



Fonte: Autoria Própria.

$$W\widetilde{V}S^t = W_t \quad (2.37)$$

a  $t$ -ésima ação de  $\widetilde{V}S$  em  $W$ .

**Lema 2.7.4.** *Seja  $V = \oplus$ . Para cada palavra  $W$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\text{q}_{W_t}(V) \rightarrow \infty) = 1.$$

**Prova:** Dada palavra  $W$ , temos  $W = w_1 \dots w_n$ .

Seja  $N = \sup\{i \leq n : w_i = \ominus\}$ . Fazemos

$$\begin{aligned} i_1 &= \inf\{i \geq 1 : w_i = \ominus\}; \\ i_2 &= \inf\{i > i_1 : w_i = \ominus\}; \\ &\vdots \\ i_m &= N. \end{aligned}$$

Assim, no primeiro caso,  $N = n$ , decompomos  $W$  nas palavras

$$\begin{aligned} W^1 &= w_1 \dots w_{i_1} \\ W^2 &= w_{i_1} \dots w_{i_2} \\ &\vdots \\ W^m &= w_{i_{m-1}} \dots w_{i_m}. \end{aligned}$$

No segundo caso,  $N < n$ , para decompormos  $W$ , além de  $W^1, \dots, W^m$ , necessitamos da palavra  $W^{m+1} = w_{i_{m+1}} \dots w_n$ , onde  $w_{i_{m+1}} = \dots = w_n = \oplus$ .

Seja  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Se  $Z_0 = q_{W^j}(\oplus)$ , então

$$\mathbb{P}(q_{W_t}(\oplus) = Z_t) = 1.$$

Logo, se estamos no primeiro caso,  $N = n$ ,

$$q_{W_t}(\oplus) = \sum_{j=1}^m Z_t^j, \text{ com } Z_0^j = q_{W_t^j}(\oplus). \quad (2.38)$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(q_{W_t}(\oplus) \rightarrow \infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Z_0^1, \dots, Z_0^m} \left( \sum_{j=1}^m Z_t^j \rightarrow \infty \right) \\ &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Z_0^1} (Z_t^j \rightarrow \infty) \\ &= 1, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do Lema 2.7.2.

Se estamos no segundo caso,  $N < n$ , então basta considerar

$$q_{W_t}(\oplus) = \sum_{j=1}^m Z_t^j + q_{W_t^{m+1}}(\oplus) \text{ com } Z_0^j = q_{W_t^j}(\oplus).$$

Mas,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sum_{j=1}^m Z_t^j + q_{W_t^{m+1}}(\oplus) \rightarrow \infty \right) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( q_{W_t^{m+1}}(\oplus) \rightarrow \infty \right) = 1.$$

■

**Lema 2.7.5.** *Seja  $V = \oplus$ . Para cada palavra  $W$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(d_{W_t}(V) \rightarrow 1) = 1.$$

**Prova:** Pela definição de  $\widetilde{VS}$ ,

$$q_{W_t}(\ominus) = q_W(\ominus), \forall t \in \mathbb{Z}_+.$$

Seja  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|d_{W_t}(\oplus) - 1| > \epsilon) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{q_{W_t}(\oplus)}{|W_t|} - 1\right| > \epsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left|\frac{q_{W_t}(\oplus)}{|q_{W_t}(\oplus) + q_{W_t}(\ominus)|} - 1\right| > \epsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left|\frac{q_{W_t}(\oplus) + q_{W_t}(\ominus) - q_{W_t}(\ominus)}{q_{W_t}(\oplus) + q_{W_t}(\ominus)} - 1\right| > \epsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{q_{W_t}(\ominus)}{q_{W_t}(\oplus) + q_{W_t}(\ominus)} > \epsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{q_W(\ominus)}{q_{W_t}(\oplus) + q_W(\ominus)} > \epsilon\right). \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.7.4, para  $\epsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(q_{W_t}(\oplus) + q_W(\ominus) > \epsilon) = 1.$$

Deste fato e de (2.39) temos para  $\epsilon$  positivo e arbitrário que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|d_{W_t}(\oplus) - 1| > \epsilon) = 0.$$

■

**Lema 2.7.6.** *Dada palavra  $W$ , a sequência de palavras aleatórias*

$$W, W\widetilde{V}S, W\widetilde{V}S^2, \dots \text{ converge para } \delta_{\oplus\mathbb{Z}}.$$

**Prova:** Pelo Lema 2.7.5, dada palavra  $V$  tal que  $q_V(\oplus) < |V|$ , logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(d_{W_t}(V) \rightarrow 0) = 1$$

e caso  $q_V(\oplus) = |V|$  então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(d_{W_t}(V) \rightarrow 1) = 1.$$

■

**Proposição 2.7.2.** *Sejam  $s \in \Omega$  e  $\delta_s$  sua respectiva medida concentrada. Segue que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_s V S^t = \delta_{\oplus\mathbb{Z}}.$$

**Prova:** Para qualquer cilindro  $C$  e  $s \in \Omega$ ,  $\delta_s(C) \in \{0, 1\}$ . É suficiente considerarmos cilindro  $C$  onde  $C = \{s \in \Omega : s_i = a_i, s_{i+1} = a_{i+1}, \dots, s_{i+n} = a_{i+n}\}$ .

Tomamos palavra aleatória  $W = a_i a_{i+1} \dots a_{i+n}$ . Claro que  $W$  tem distribuição  $\text{restrict}(\delta_s | s_i, \dots, s_{i+n})$ . Seja  $W_1, W_2, \dots$  a sequência de palavras aleatórias tais que  $W_t = W\widetilde{V}\widetilde{S}^t$ . Pelo Lema 2.7.6, vimos que  $W\widetilde{V}\widetilde{S}^t$  converge para  $\delta_{\oplus z}$  com  $t \rightarrow \infty$ . Esta convergência é no sentido que, dada a frequência  $\mathbf{d}_W(\oplus)$  definida em (2.1), então (2.2) ocorre. Mais, isto ocorre para qualquer  $W \in \text{dic}(\{\oplus, \ominus\})$ . Logo, isto ocorre para cada cilindro com  $\delta_s(C) = 1$ .

Daí, concluimos nossa proposição. ■

**Proposição 2.7.3.** *Dada palavra aleatória  $X$ , a sequência de palavras aleatórias*

$$X, X\widetilde{V}\widetilde{S}, X\widetilde{V}\widetilde{S}^2, \dots \text{ converge para } \delta_{\oplus z}.$$

**Prova:** Evidentemente  $\text{dic}(\{\oplus, \ominus\})$  é contável. Vimos no Lema 2.7.4, mais especificamente em (2.38), que dada palavra  $W$ ,  $\mathbf{q}_{W_t}(\oplus)$  é uma convolução finita de cadeias de Markov independentes umas das outras, cujo conjunto de estados é contável. Logo,  $\mathbf{q}_{W_t}(\oplus)$  é uma cadeia de Markov. Daí, para qualquer  $X$ , definindo  $X_t = X\widetilde{V}\widetilde{S}^t$ ,  $\mathbf{q}_{X_t}(\oplus)$  é uma cadeia de Markov com distribuição inicial em  $\{\mathbf{q}_W(\oplus) : W \in \Delta_X\}$ . Ainda pelo Lema 2.7.4, vimos que  $\mathbf{q}_{W_t}(\oplus)$  é transiente para cada  $W$ . Logo,  $\mathbf{q}_{X_t}(\oplus)$  também é transiente.

Daí,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{q}_{X_t}(\oplus) \rightarrow \infty) = 1. \quad (2.40)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\mathbf{d}_{X_t}(\oplus) - 1| > \epsilon) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathbf{q}_{X_t}(\oplus)}{|X|} - 1\right| > \epsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathbf{q}_{X_t}(\oplus) + \mathbf{q}_{X_t}(\ominus) - \mathbf{q}_{X_t}(\ominus)}{\mathbf{q}_{X_t}(\oplus) + \mathbf{q}_{X_t}(\ominus)} - 1\right| > \epsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\mathbf{q}_{X_t}(\ominus)}{\mathbf{q}_{X_t}(\oplus) + \mathbf{q}_{X_t}(\ominus)} > \epsilon\right). \end{aligned}$$

Usando que  $\mathbf{q}_{X_t}(\ominus) \in \{0, \dots, M\}$ , isto ocorre por  $\Delta_X$  ser finito, temos

$$\mathbb{P}\left(\frac{\mathbf{q}_{X_t}(\ominus)}{\mathbf{q}_{X_t}(\oplus) + \mathbf{q}_{X_t}(\ominus)} > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{M}{\mathbf{q}_{X_t}(\oplus)} > \epsilon\right).$$

Mas, por (2.40)

$$\mathbb{P}\left(\frac{M}{\mathbf{q}_{X_t}(\oplus)} > \epsilon\right) \rightarrow 0 \text{ com } t \rightarrow \infty.$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|d_{X_t}(\oplus) - 1| > \epsilon) = 0. \quad (2.41)$$

De (2.41) concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|d_{X_t}(V) - 1| > \epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{se } q_V(\oplus) < |V| \\ 1, & \text{se } q_V(\oplus) = |V|. \end{cases}$$

■

**Prova do teorema 2.2.2:** Se  $\mu$  é uma  $\delta$ -medida, já provamos na Proposição 2.7.2. Consideraremos então  $\mu$  diferente de  $\delta$ -medidas. Seja  $C$  um cilindro da forma  $C = \{s \in \Omega : s_i = a_i, s_{i+1} = a_{i+1}, \dots, s_{i+n} = a_{i+n}\}$ . Este tipo de cilindro é o suficiente para analisarmos. Seja uma palavra aleatória  $X$  com distribuição  $\text{restrict}(\mu|_{s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+n}})$ . Vimos na Proposição 2.7.3 que  $X\widetilde{VS}^t$  converge para  $\delta_{\oplus}$ .

Isto ocorre para qualquer palavra aleatória  $X$  fixado qualquer cilindro. Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu\widetilde{VS}^t = \delta_{\oplus}.$$

■

Com devidos ajustes, esta prova poderia ter englobado parte do Teorema 2.2.1. Mas, preferimos não fazer isto, uma vez que introduzimos o conceito de monotonicidade para um dos nossos operadores, a saber: nascimento.

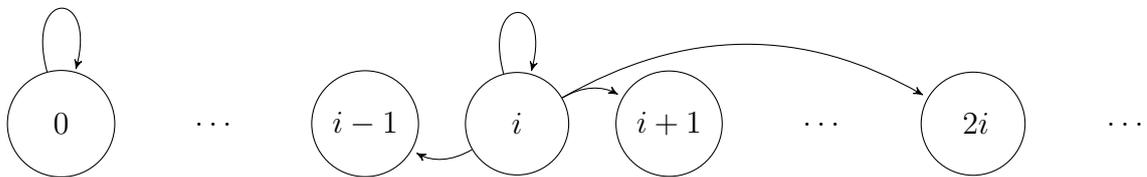
Considerando a configuração *todas menos*, então podemos associar a cada segmento  $\{i_l, i_{l+1}\}$  um processo aleatório  $(Z_t^{i_l i_{l+1}})_{t \in \mathbb{N}}$ , com  $Z_0^{i_l i_{l+1}} = 0$ , para todo  $l \in \mathbb{Z}$ . A Figura 8 ilustra a associação entre a densidade de mais entre duas componentes  $s_{i_l} = s_{i_{l+1}} = \ominus$  e o processo  $Z^{i_l i_{l+1}}$ . Satisfazendo as hipóteses do Lema 2.7.3 e pelo Teorema 2.2.2, existe  $T_0$  tal que  $T > T_0$  implica que a densidade de menos é tão pequena quanto desejarmos.

## 2.8 PROVA DO TEOREMA 2.2.3

Considerando o parâmetro  $\alpha = 1$  e  $\beta \in (0, 1)$ . O processo  $Z$ , Figura 9, passa a ter o estado zero como absorvente. Além disso, tem probabilidades de transição dadas por:

$$\mathbb{P}(Z_{t+1} = i + k | Z_t = i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k = 0 \\ \binom{i+1}{k+1} \beta^{k+1} (1-\beta)^{i-k}, & \text{se } i > 0 \text{ e } k \in \{-1, \dots, i\} \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (2.42)$$

**Figura 9** – *Diagrama de transição do processo  $Z$  considerando  $\alpha = 1$  e  $\beta \in (0, 1)$ .*



Fonte: Autoria Própria.

**Lema 2.8.1.** *No processo  $Z$  com  $\alpha = 1$ ,  $0$  é um estado absorvente e  $i > 0$  é transiente. Eventualmente,  $\{Z_t \rightarrow 0\}$  ou  $\{Z_t \rightarrow \infty\}$  quando  $t$  tende para infinito.*

**Prova:** Para o processo  $Z$ , definimos o tempo de primeira passagem para o estado  $i$  como a variável aleatória

$$T_i = \inf\{t \geq 1 : Z_t = i\}, \quad (2.43)$$

onde o ínfimo do conjunto vazio é infinito.

Denotamos  $Z_0$  por  $i_0$ . É evidente: se  $i_0 = 0$ , então  $\mathbb{P}(Z_t = 0) = 1, \forall t \in \mathbb{Z}_+$ .

Vejamos o caso em que  $i_0 > 0$ . Neste caso, mostraremos que a probabilidade de que o processo não retorne ao estado no qual ele iniciou é positiva, isto é,

$$\mathbb{P}_{i_0}(T_{i_0} = \infty) > 0. \quad (2.44)$$

Note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{i_0}(T_{i_0} = \infty) &\geq \mathbb{P}_{i_0}(Z_t = 0 \text{ para algum } t \in \mathbb{Z}_+) \\ &\geq \mathbb{P}_{i_0}(Z_{i_0} = 0, Z_{i_0-1} = 1, Z_{i_0-2} = 2, \dots, Z_1 = i_0 - 1) \\ &= q_{i_0} q_{i_0-1} \dots q_1 > 0, \end{aligned}$$

onde  $q_{i_0} = \mathbb{P}(Z_{t+1} = i_0 - 1 | Z_t = i_0)$ . Assim, provamos (2.44).

Logo,

$$\mathbb{P}_{i_0}(T_{i_0} < \infty) = 1 - \mathbb{P}_{i_0}(T_{i_0} = \infty) < 1.$$

Usando o **Auxiliar 13**, concluímos que  $i_0$  é um estado transiente. ■

Quando  $\alpha = 1$  e  $\beta \in (0, 1)$ , verificamos pelo Lema 2.8.1 que se  $Z_0 = i > 0$ , então o processo  $Z$  é absorvido com probabilidade positiva menor que um ou para cada valor natural  $n$ , a probabilidade do evento  $\{Z_t \leq n\}$  tende para zero quando  $t$  tende para infinito. Logo, somos impossibilitados de estudar, como definimos, a velocidade de convergência do processo VS neste caso.

### 2.8.1 O operador VS em algumas $\delta$ -medidas

**Lema 2.8.2.** *Seja  $\delta_s$  onde*

$$s_i = \begin{cases} \oplus, & \text{se } i_0 \leq i \leq j_0; \\ \ominus, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, para  $\alpha = 1$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_s \mathbf{VS}^t = \lambda \delta_{\ominus^z} + (1 - \lambda) \mu,$$

onde  $\lambda \in (0, 1)$  e existe  $i, i + 1, \dots, i + N$  tal que  $\mu(s_i = s_{i+1} = \dots = s_{i+N} = \oplus) > 0$ ,  $\forall N \in \mathbb{N}$ .

**Prova:** Note que, o número de mais consecutivos em  $s$  em cada passo de tempo, é descrito pelo processo  $Z$  com  $\alpha = 1$  (ver (2.42)) e  $Z_0 = j_0 - i_0 + 1$ .

Pelo Lema 2.8.1, existe constante positiva  $c^{Z_0} \in (0, 1)$  tal que

$$\mathbb{P}_{Z_0}(Z_t \text{ ser absorvido}) = c^{Z_0} \text{ e } \mathbb{P}_{Z_0}(Z_t \rightarrow \infty \text{ com } t \rightarrow \infty) = 1 - c^{Z_0}.$$

Logo,  $c^{Z_0}$  é o escalar tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_s \mathbf{VS}^t(\text{todos menos}) = c^{Z_0}$  e  $1 - c^{Z_0}$  é o escalar tal que para cada posição  $i$  e cada valor natural  $N$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_s \mathbf{VS}^t(s_i = s_{i+1} = \dots = s_{i+N} = \oplus) = 1 - c^{Z_0}$ .



Diremos que uma  $\delta$ -medida,  $\delta_s$ , é *próxima* da medida  $\delta_{\ominus\mathbb{Z}}$  se  $\{i \in \mathbb{Z} : s_i \neq \ominus\}$  é finito. O Lema 2.8.2 nos garante que mesmo iniciando o processo em uma distribuição próxima de  $\delta_{\ominus\mathbb{Z}}$ , a qual é invariante para  $\mathbf{VS}$ , ele não converge para esta medida invariante. Logo  $\delta_{\ominus\mathbb{Z}}$  não se comporta como atrator local.

**Lema 2.8.3.** *Seja  $\delta_s$  uma medida concentrada em  $s$  onde  $\{i \in \mathbb{Z} : s_i \neq \ominus\}$  é finito e  $\alpha = 1$ . Logo,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_s \mathbf{VS}^t = \lambda \delta_{\ominus\mathbb{Z}} + (1 - \lambda) \mu,$$

onde  $\lambda \in (0, 1)$  e existe  $i, i + 1, \dots, i + N$  tal que  $\mu(s_i = s_{i+1} = \dots = s_{i+N} = \oplus) > 0$ ,  $\forall N \in \mathbb{N}$ .

**Prova:** Sejam

$$\begin{aligned} i_1 &= \inf\{i \in \mathbb{Z} : s_{i-1} = \oplus \text{ e } s_i = \ominus\} \\ i_2 &= \inf\{i > i_1 : s_{i-1} = \oplus \text{ e } s_i = \ominus\} \\ &\vdots \\ i_{n+1} &= \inf\{i > i_n : s_{i-1} = \oplus \text{ e } s_i = \ominus\}. \end{aligned}$$

Para o valor  $n + 1$  a partir do qual  $\inf\{i > i_n : s_{i-1} = \oplus \text{ e } s_i = \ominus\}$  é vazio, o qual certamente haverá dada a condição sobre a configuração.

Nós consideramos apenas a sequência  $i_1, i_2, \dots, i_n$  associada a esta configuração.

Definimos

$$i_0 = \inf\{i \in \mathbb{Z} : s_{i-1} = \ominus \text{ e } s_i = \oplus\}.$$

Daí, tomamos as palavras em  $s$

$$\begin{aligned} W_1 &= w_{i_0-1}, \dots, w_{i_1} \\ W_2 &= w_{i_1+1}, \dots, w_{i_2} \\ &\vdots \\ W_n &= w_{i_{n-1}+1}, \dots, w_{i_n} \end{aligned} \tag{2.45}$$

Se tomamos uma palavra aleatória  $W$  onde todas as letras são menos, então é claro que a palavra  $V$  obtida de  $W$  após ação do nosso operador é tal que

$$\mathbb{P}(W = V) = 1.$$

Dada uma palavra  $W_j = w_{i_{j-1}+1} \dots w_{i_j}$  com  $j \in \{1, \dots, n\}$ , podemos associá-la a um cilindro fino  $C_j = \{s \in \Omega : s_{i_{j-1}+1} = w_{i_{j-1}+1}, \dots, s_{i_j} = w_{i_j}\}$ . Daí, note que

$$s = \{s_i : i \leq i_0\} \cap \left( \bigcap_{k=1}^n C_k \right) \cap \{s_i : i \geq i_n\}.$$

Tomamos uma palavra  $W_j$  com  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Embora não tenhamos definido formalmente a ação do operador  $\mathbf{VS}$  em palavras, acreditamos ser bastante intuitiva. Por isso, decidimos não fazê-la.

Quando

$$W_j \rightarrow V_j^1,$$

$V_j^1$  é a nova palavra aleatória obtida de  $W_j$ . Assim, o número de componentes no estado mais em  $V_j^1$  é dado por  $Z_1^j$ , com  $Z_0^j$  dado por  $s_{j+1}$  e  $s_j$ . Se iteramos a evolução desta palavra aleatória, teremos a transição do  $t$ -ésimo para o  $(t+1)$ -ésimo passo de tempo dado por

$$V_j^t \rightarrow V_j^{t+1},$$

onde o número de mais em  $V_j^{t+1}$  é dado por  $Z_t$  (ver (2.42)), a qual denotamos por  $Z_t^j$  para associar a evolução da palavra  $W_j$ .

Pelos lemas 2.8.1 e 2.8.2,

$$\mathbb{P}(Z_t^j \text{ ser absorvido}) = c^{Z_0^j} > 0 \text{ e } \mathbb{P}(Z_t^j \rightarrow \infty \text{ com } t \rightarrow \infty) = 1 - c^{Z_0^j} > 0.$$

Daí,

$$\mathbb{P}(\exists t_0 < \infty : V_j^t = V_j^{t_0}, \forall t > t_0) = c^{Z_0^j}. \quad (2.46)$$

Por outro lado, para todo  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(\exists t_0^N < \infty : t > t_0^N \text{ implica } V_j^t = \bigoplus^N W_j \ominus) = 1 - c^{Z_0^j}. \quad (2.47)$$

Provamos que isto ocorre para cada  $W_i$ . Logo, para que  $\delta_s \mathbf{VS}^t \rightarrow \delta_{\oplus \mathbb{Z}}$  é necessário que cada  $W_i$  satisfaça (2.46), o que ocorre com probabilidade positiva dada por

$$\xi = c^{Z_0^1} c^{Z_0^2} \dots c^{Z_0^N} > 0.$$

Por outro lado, para que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_s \mathbf{VS}^t = \mu$  é necessário que ao menos umas das  $W_i$  satisfaça (2.47), o que ocorre com probabilidade  $1 - \xi > 0$ .

■

Neste ponto, faremos algumas ponderações em relação aos lemas 2.8.2 e 2.8.3. A medida  $\mu$  que é descrita nos respectivos enunciados deve ser uma combinação convexa das  $\delta$ -medidas  $\delta_{\oplus \mathbb{Z}}$ ,  $\delta_s$  e  $\delta_v$ , onde  $s = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  e  $v = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  são dadas por

$$s_i = \begin{cases} \ominus, & \text{se } i < i_0; \\ \oplus, & \text{se } i \geq i_0. \end{cases} \quad \text{e } v_i = \begin{cases} \oplus, & \text{se } i < i_0; \\ \ominus, & \text{se } i \geq i_0. \end{cases}$$

Ao considerarmos um análogo de nosso processo agindo em configurações finitas, somos capazes de afirmar, para análogos dos correspondentes lemas 2.8.2 e 2.8.3 iniciando em delta medidas concentradas em palavras, que  $\mu$  é  $\delta_{\oplus \mathbb{Z}}$ .

Considere um processo de nascimento e morte,  $L^2$ , onde

$$\mathbb{P}(L_{t+1}^2 = 0 | L_t^2 = 0) = q_0,$$

$$\mathbb{P}(L_{t+1}^2 = 1 | L_t^2 = 0) = p_0,$$

$$\mathbb{P}(L_{t+1}^2 = n - 1 | L_t^2 = n) = \mathbb{P}(Z_{t+1} = n - 1 | Z_t = n) + \mathbb{P}(Z_{t+1} = n | Z_t = n) = q_n, \text{ para } n > 0,$$

$$\mathbb{P}(L_{t+1}^2 = n + 1 | L_t^2 = n) = 1 - q_n,$$

com  $q_0 = 1, p_0 = 0$  e para  $i > 0$ ,  $q_i = (1 - \beta)^{i+1} + (i + 1)\beta(1 - \beta)^i$  e  $p_i = 1 - q_i$ .

Na cadeia de Markov,  $L^2$ , o estado zero é absorvente. Denotamos por  $h_i$ , a probabilidade que o processo seja absorvido, isto é, alcance o estado zero, dado que o processo iniciou no estado  $i$ .

É bem conhecido, e a prova pode ser vista em [30] na p. 17, que em um processo de nascimento e morte com estas características, zero sendo o único estado absorvente,

$$h_i = \frac{\sum_{j=i}^{\infty} \gamma_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j}, \text{ com } \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j < \infty, \quad (2.48)$$

onde  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_i = \prod_{k=1}^i \frac{q_k}{p_k}$ . Neste caso,  $h_i < 1$ . Se  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \gamma_i$  diverge, então  $h_i = 1$ .

**Lema 2.8.4.** *Seja  $L_0^2 = i$ . Se  $i \geq 0$ , então em  $L^2$  temos*

- (a)  $h_i = 1$ , para  $i = 0$ ;
- (b)  $0 < h_i < 1$ , para  $i > 0$ .

**Prova:** O item (a) é trivial. Agora, mostraremos (b). A desigualdade,  $h_i > 0$ , é evidente, uma vez que tendo-se iniciado no estado  $i$  a probabilidade de  $L_1^2 = i-1, L_2^2 = i-2, \dots, L_i^2 = 0$  é positiva. Falta verificarmos,  $h_i < 1$ . Para isto, é suficiente verificarmos se  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_j < \infty$ .

Pelo teste da razão, verificaremos se  $\gamma_j$  converge. Note que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{j+1}}{\gamma_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{q_{j+1}}{p_{j+1}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(1-\beta)^{j+1} + (j+1)(1-\beta)^j}{1 - (1-\beta)^{j+1} + (j+1)(1-\beta)^j} = 0.$$

Logo,  $\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j$  é convergente e utilizando (2.48), concluímos que  $h_i < 1$ . ■

**Proposição 2.8.1.** *Seja  $\delta_s$  uma medida concentrada em uma configuração que possui infinitas posições  $i_l \in \mathbb{N}$  talque  $|i_l - i_{l+1}| > 1$ ,  $\delta_s(E_{i_l, i_{l+1}}) = 1$  e  $\alpha = 1$ . Então para cada valor natural  $N$  existem posições  $i, i+1, i+2, \dots, i+N$  tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_s \text{VS}^t(s_i = \dots = s_{i+N} = \oplus) > 0,$$

e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_s \text{VS}^t(\text{todos menos}) = 0$ . Em particular, se  $\{i_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  é uma sequência bi-infinita, então  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_s \text{VS}^t = \delta_{\oplus^{\mathbb{Z}}}$ .

**Prova:** Sabemos que  $\delta_s$  é concentrada em uma configuração com infinitas posições  $\{i_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  com  $|i_l - i_{l+1}| > 1$ , talque  $\mu(E_{i_l, i_{l+1}}) = 1$  e para um dado cilindro fino,  $C$ , temos  $\mu(C) = 0$  ou  $\mu(C) = 1$ .

Podemos associar para estes segmentos  $\{i_l, i_{l+1}\}$  infinitos processos  $(Z_t^{i_l, i_{l+1}})_{t \in \mathbb{N}}$  com  $Z_0^{i_l, i_{l+1}} > 0$ , os quais evoluem de forma independente uns dos outros.

Observe que o processo  $L^2$  limita inferiormente o processo  $Z^{i_0, i_1}$  com probabilidade 1. De fato, se considerarmos um acoplamento entre os processos  $L^2$  e  $Z^{i_0, i_1}$  considerando  $L_0^2 = Z_0^{i_0, i_1}$ , temos: (a) quando o processo  $Z^{i_0, i_1}$  decresce uma unidade ou permanece no mesmo estado, então o processo  $L^2$  decresce uma unidade; (b) quando o processo  $L^2$  cresce uma unidade, então o processo  $Z^{i_0, i_1}$  cresce pelo menos uma unidade. Logo,  $\mathbb{P}(L_t^2 \leq Z_t^{i_0, i_1}) = 1$ .

Temos ainda que  $\mathbb{P}_{Z_0^{i_0, i_1}}(Z_t^{i_0, i_1} \rightarrow \infty \text{ com } t \rightarrow \infty) = 1 - c^{Z_0^{i_0, i_1}}$ , onde  $c^{Z_0^{i_0, i_1}}$  é a probabilidade de absorção do processo  $Z^{i_0, i_1}$ . Além disso, quanto maior  $|i_0 - i_1|$ , menor a

probabilidade de absorção. Ou seja,  $\mathbb{P}_{Z_0^{i_0 i_1}}(Z_t^{i_0 i_1} \rightarrow \infty \text{ com } t \rightarrow \infty)$  cresce quando maior é a distância entre as posições  $i_0$  e  $i_1$ . Como o processo  $L^2$  limita inferiormente o processo  $Z^{i_0 i_1}$  com probabilidade 1 e para todo  $l$ , o processo  $Z^{i l i+1}$  evolui sob a mesma lei, então para todo  $l \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}_{Z_0^{i l i+1}}(Z_t^{i l i+1} \rightarrow \infty \text{ com } t \rightarrow \infty) \geq \mathbb{P}_1(Z_t^{i l i+1} \rightarrow \infty \text{ com } t \rightarrow \infty) \geq 1 - h_1 > 0,$$

pelo Lema 2.8.4, onde  $h_1$  é a probabilidade de absorção do processo  $L^2$ .

Logo, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \mathbb{P}_{Z_0^{i l i+1}}(Z_t^{i l i+1} \rightarrow \infty \text{ com } t \rightarrow \infty) = \infty. \quad (2.49)$$

Com uso do Lema de Borel-Cantelli, concluímos que  $\mathbb{P}_{Z_0^{i l i+1}}(\{Z_t^{i l i+1} \rightarrow \infty \text{ com } t \rightarrow \infty\} \text{ infinitas vezes}) = 1$ . Assim, para cada  $N$  há posição  $i$  tal que para que  $\delta_s \mathbf{VS}^t$  convirja para  $\delta_{\ominus \mathbb{Z}}$ , quando  $t$  tende para infinito, é necessário que todo processo  $Z^{i l i+1}$  seja absorvido. Mas a probabilidade disto ocorrer é zero.

Se  $\{i_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  forma uma sequência bi-infinita, então podemos aplicar (2.49) aos pares negativos e pares positivos,  $\{i_l, i_{l+1}\}$ . Em cada um desses casos, (2.49) é satisfeita. Logo, como nosso sistema é em  $\mathbb{Z}$ , este crescimento será: para a direita, para a esquerda ou para ambos os lados. Em qualquer combinação destes nascimentos de mais, a densidade de menos converge para zero. ■

## 2.8.2 O Operador VS em Medidas Uniformes

Seja  $\beta \in (0, 1)$ . Se  $\mu \in \mathcal{M}_U$ , seguem:

$$\mu \mathbf{N}_\beta(\ominus) = \frac{\mu(\ominus)}{1 + \beta} \text{ e } \mu \mathbf{M}_1(\ominus) = \frac{\mu(\ominus)}{1 - \mu(\oplus \ominus)}. \quad (2.50)$$

**Lema 2.8.5.** *Sejam  $\mu \in \mathcal{M}_U$  e  $\mu_t = \mu \mathbf{VS}^t$ .*

- (a) *Se  $\frac{\beta}{1+\beta} < \mu_t \mathbf{N}_\beta(\oplus \ominus) \leq \frac{1}{2}$ , então  $\mu_t(\ominus) < \mu_{t+1}(\ominus)$ ;*
- (b) *Se  $\mu_t \mathbf{N}_\beta(\oplus \ominus) < \frac{\beta}{1+\beta}$ , então  $\mu_t(\ominus) > \mu_{t+1}(\ominus)$ ;*
- (c) *Se  $\mu_t \mathbf{N}_\beta(\oplus \ominus) = \frac{\beta}{1+\beta}$ , então  $\mu_t(\ominus) = \mu_{t+1}(\ominus)$ .*

**Prova:** Observe que

$$\begin{aligned}
\mu_t(\ominus) - \mu_{t+1}(\ominus) &= \mu_t(\ominus) - \frac{\mu_t(\ominus)}{(1+\beta)(1-\mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus))} \\
&= \frac{\mu_t(\ominus)[1-\mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus)+\beta-\beta\mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus)]-\mu_t(\ominus)}{(1+\beta)(1-\mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus))} \\
&= \frac{\mu_t(\ominus)[\beta-\mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus)-\beta\mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus)]}{(1+\beta)(1-\mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus))} \\
&= \frac{\mu_t(\ominus)[\beta-\mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus)(1+\beta)]}{(1+\beta)(1-\mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus))}. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

O denominador de (2.51) é sempre positivo, analisemos seu numerador. Para provar (a), note que para qualquer medida uniforme,  $\mu(\oplus\ominus) \leq \frac{1}{2}$ . Além disso

$$\frac{\beta}{1+\beta} < \mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus) \Leftrightarrow \beta - \mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus)(1+\beta) < 0.$$

Logo,  $\mu_t(\ominus) < \mu_{t+1}(\ominus)$ . A prova dos itens (b) e (c) seguem de maneira semelhante, basta tomar  $\frac{\beta}{1+\beta} > \mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus)$  e  $\frac{\beta}{1+\beta} = \mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus)$ , respectivamente. ■

**Lema 2.8.6.** *Seja  $\mu \in \mathcal{M}_U$ .*

(a)  $\mu_t = \delta_{\oplus z}$  se e só se  $\mu_{t+1} = \delta_{\oplus z}$ ;

(b)  $\mu_t = \delta_{\ominus z}$  se e só se  $\mu_{t+1} = \delta_{\ominus z}$ .

**Prova:** Os itens (a) e (b) no sentido *só se* são triviais.

Vejamos (a) no sentido *se*. Observe que

$$\mu_{t+1}(\ominus) = \frac{\mu_t(\ominus)}{(1+\beta)(1-\mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus))}. \tag{2.52}$$

Seja  $\mu_{t+1}(\ominus) = 0$ . Logo,  $\mu_t(\ominus) = 0$ , o que ocorre se e só se  $\mu_t = \delta_{\oplus z}$ .

Vejamos (b) no sentido do *se*.

$$\mu_{t+1}(\ominus) = \frac{\mu_t\mathbf{N}_\beta(\ominus)}{1-\mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus)} \text{ e } \mu_{t+1}(\ominus) = 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\mu_t\mathbf{N}_\beta(\ominus) &= 1 - \mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus) \\
&= \mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus) + \mu_t\mathbf{N}_\beta(\ominus) - \mu_t\mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus)
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\mu_t \mathbf{N}_\beta(\oplus) - \mu_t \mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus) = 0.$$

Se esta última igualdade ocorrer, implica-se que

$$\mu_t \mathbf{N}_\beta(\oplus) = \mu_t \mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus) \text{ e } \mu_t \mathbf{N}_\beta(\oplus\oplus) = 0.$$

Mas, sabemos que  $\mu_t \mathbf{N}_\beta(\oplus\oplus) = 0$  implica  $\mu_t(\oplus\oplus) = 0$ . Se  $\mu_t(\oplus) > 0$ , então  $\mu_t \mathbf{N}_\beta(\oplus\oplus) > 0$ .

Logo, a única possibilidade para que  $\mu_t \mathbf{N}_\beta(\oplus\oplus) = 0$  é  $\mu_t(\oplus) = 0$ .

■

**Lema 2.8.7.** *Seja  $\mu \in \mathcal{M}_U$ . Se  $\mu_t \mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus) \neq \frac{\beta}{1+\beta}$ , então  $\delta_{\oplus\mathbb{Z}}$  e  $\delta_{\ominus\mathbb{Z}}$  são as únicas medidas invariantes de VS.*

**Prova:** Para que  $\mu$  seja uma medida invariante de VS, é necessário aue

$$\mu(\ominus) = \mu(\text{VS})(\ominus).$$

Mas, pelo Lema 2.8.5, isso só ocorre quando  $\mu \mathbf{N}_\beta(\oplus\ominus) = \frac{\beta}{1+\beta}$ .

■

O Lema 2.8.7 e o Teorema 2.2.3 mostram que as únicas medidas invariantes de VS são  $\delta_{\oplus\mathbb{Z}}$  e  $\delta_{\ominus\mathbb{Z}}$ .

**Prova do teorema 2.2.3:** O resultado é imediato quando  $\mu = \delta_{\oplus\mathbb{Z}}$ . Logo, não consideraremos esta medida inicial.

O item (a) segue da proposição 2.8.1.

Vejamos o item (b). Neste caso, há posições  $i < j$  com  $j - i > 1$ , onde  $\mu(E_{ij}) > 0$ , então, quase certamente, há uma sequência bi-infinita de posições,  $\{i_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$  tais que

$$\mu(E_{i_l i_{l+1}}) > 0$$

e assumem o mesmo valor para todo  $l \in \mathbb{Z}$ . Ou seja,

$$\dots = \mu(E_{i_{-2} i_{-1}}) = \mu(E_{i_{-1} i_0}) = \mu(E_{i_0 i_1}) = \dots$$

Associamos a quantidade de mais no segmento  $\{i_l, i_{l+1}\}$  ao processo  $(Z_t^{i_l i_{l+1}})_{t \in \mathbb{Z}_+}$  onde  $Z_0^{i_l i_{l+1}} = i_{l+1} - i_l + 1$ .

No processo VS, o que ocorre entre duas componentes, consecutivas no estado menos, é independente do que ocorre nas outras posições. Assim, os processos

$$\dots Z^{i-3i-2}, Z^{i-2i-1}, Z^{i-1i_0}, Z^{i_0i_1}$$

evoluem de forma independente uns dos outros.

Definimos o evento

$$A_l = \{Z_t^{i_l i_{l+1}} \rightarrow \infty \text{ com } t \rightarrow \infty\}. \quad (2.53)$$

Se realizarmos um acoplamento entre os processos  $L^2$  e  $Z$  considerando  $L_0^2 = Z_0$ , temos dois casos na atualização dos processos em cada passo de tempo: (a) se o processo  $Z$  decresce uma unidade ou permanece no mesmo estado, então o processo  $L^2$  decresce uma unidade; (b) se o processo  $L^2$  cresce uma unidade, então o processo  $Z$  cresce pelo menos uma unidade. Assim, teremos  $\mathbb{P}(L_t^2 \leq Z_t) = 1$ .

Além disso, como as condições iniciais para  $Z_0^{i_l i_{l+1}}$  são iguais para todo  $l$  e

$$\dots = \mathbb{P}_{Z_0^{i_0 i_1}}(A_{-1}) = \mathbb{P}_{Z_0^{i_0 i_1}}(A_0) = \mathbb{P}_{Z_0^{i_0 i_1}}(A_1) = \dots$$

Daí, com  $L_0^2 = Z_0^{i_0 i_1}$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}_{Z_0^{i_0 i_1}}(A_l) > \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}_{L_0^2}(L_t^2 \rightarrow \infty \text{ com } t \rightarrow \infty) = \infty.$$

Logo, pelo Lema de Borel-Cantelli, temos que

$$\mathbb{P}_{Z_0^{i_0 i_1}}(A_l \text{ infinitas vezes}) = 1.$$

Ou seja, haverá, com probabilidade 1, bi-infinitos  $Z_t^{i_l i_{l+1}} \rightarrow \infty$  com  $t \rightarrow \infty$ .

Daí,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu \text{VS}^t = \delta_{\oplus z}.$$

■

O teorema 2.2.3 mostra que a medida  $\lambda \delta_{\ominus z} + (1 - \lambda) \delta_{\oplus z}$ , com  $\lambda \in (0, 1)$  não é invariante. Ou seja, VS não é linear. Destacamos o seguinte fato: mesmo a cadeia de Markov,  $Z$ , sendo absorvida com probabilidade positiva, ao atuarem conjuntamente, de forma independente, o processo VS não converge para  $\delta_{\ominus z}$ .

## 2.9 PROVA DO TEOREMA 2.2.4

Dado valor natural  $N$ , definiremos uma cadeia de Markov, com o conjunto de estados  $\{0, 1, \dots, N\}$  onde  $N$  é o único estado absorvente e denotamos este processo por  $Z^N$ . Definir o processo desta maneira nos permitirá definir convenientemente uma variável aleatória, a qual nos permitirá estudar o tempo em que o processo atinge o estado  $N$  pela primeira vez. Além disso, dada qualquer distribuição inicial, a probabilidade de absorção da cadeia de Markov é 1 quando o tempo tende a infinito.

O processo  $Z^N$  pode ser visto como um truncamento do processo  $Z$ . Denotamos as probabilidades de transição do estado  $i$  para o estado  $j$  nos processos  $Z$  e  $Z^N$  por  $p_{ij}$  e  $p_{ij}^N$  respectivamente.

As probabilidades de transição do processo  $Z^N$  são dadas por

$$p_{ij}^N = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j = N; \\ p_{ij}, & \text{se } 0 \leq i, j < N; \\ \sum_{l=j}^{2i+1} p_{il}, & \text{se } j > i \text{ e } j = N; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (2.54)$$

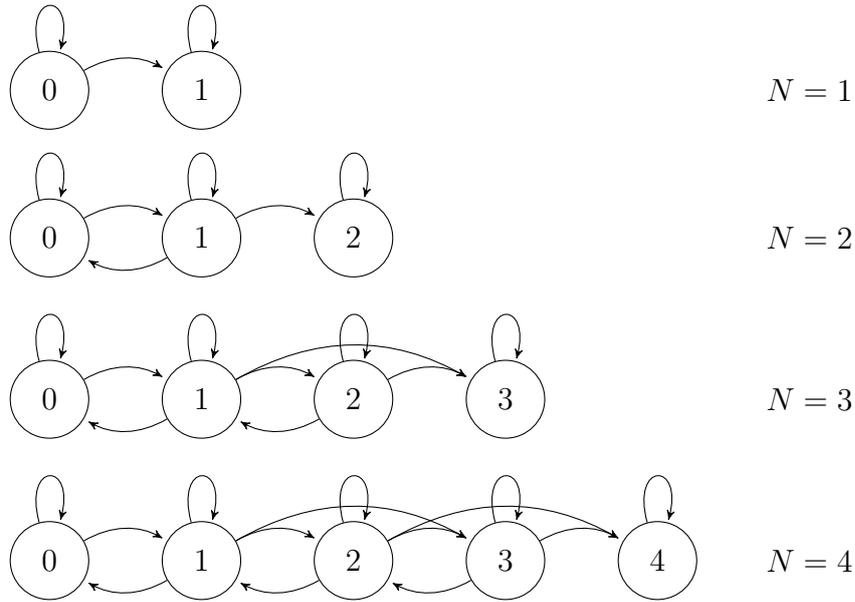
A seguir, exibimos os diagramas de transição de  $Z^N$  nos casos em que  $N \in \{1, 2, 3, 4\}$  e fazemos uma comparação com o diagrama do processo  $Z$ . No processo  $Z$ , se no tempo  $t$  tivermos  $Z_t = N$ , então no tempo  $t + 1$  poderemos ter  $Z_{t+1} \in \{N - 1, \dots, 2N + 1\}$ . No processo  $Z^N$ , se no tempo  $t$  tivermos  $Z_t = N$ , então no tempo  $t + 1$  teremos  $Z_{t+1} = N$  com probabilidade 1, isto é, as probabilidades de transição que definimos no processo  $Z$  para os estados  $\{N - 1, N, \dots, 2N + 1\}$  são todas somadas à probabilidade de transição do estado  $N$  do processo  $Z^N$ .

Seja

$$T_N = \inf\{t \geq 0 : Z_t \geq N\}. \quad (2.55)$$

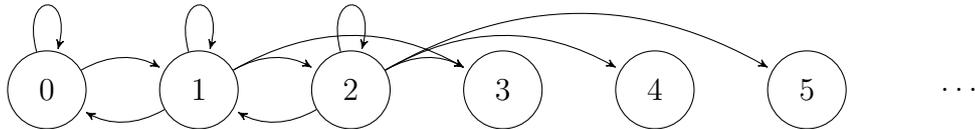
É fácil ver que em  $Z^N$ , o tempo médio de absorção (alcançar o estado  $N$ ) dado que  $Z_0^N = 0$ , é de fato,  $\mathbb{E}_0(T_N)$  no processo  $Z$ . Denotamos o tempo de absorção do processo  $Z^N$ , dado que o processo iniciou em  $Z_0^N = 0$ , por  $H_N$ . Se realizarmos um acoplamento entre os processos  $Z^N$  e  $Z$ , considerando  $Z^N = Z = 0$ , então teremos,  $\mathbb{P}_0(T_N = H_N) = 1$ .

Figura 10 – Diagramas de transição do processo  $Z^N$  com  $N \in \{1, 2, 3, 4\}$ .



Fonte: Autoria Própria.

Figura 11 – Diagrama de transição do processo  $Z$ .



Fonte: Autoria Própria.

**Lema 2.9.1.** Se  $Z_0^{N-1} = Z_0^N = 0$ , com  $N > 1$ , então

$$\mathbb{P}_0(H_{N-1} \leq H_N) = 1.$$

**Prova:** Realizando um acoplamento entre os processos  $Z^{N-1}$  e  $Z^N$  tomando  $Z_0^{N-1} = Z_0^N = 0$ , temos: (a) quando o processo  $Z^N$  decresce uma unidade ou permanece no mesmo estado e  $Z^{N-1} < N - 1$ , então o mesmo ocorre com o processo  $Z^{N-1}$ ; (b) quando o processo  $Z^{N-1}$  cresce para o estado  $j$ , com  $i < j < N - 1$ , então o processo  $Z^N$  também cresce para o estado  $j$ ; (c) quando o processo  $Z^{N-1}$  cresce para o estado  $N - 1$ , então  $Z^N$  também cresce para o estado  $N - 1$  ou para o estado  $N$ . Daí, concluímos que  $\mathbb{P}_0(H_{N-1} \leq H_N) = 1$ . ■

**Lema 2.9.2.** Sejam  $1 < a < b \in \mathbb{R}_+$  e

$$A_a = \{(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2 : \mathbb{E}_0(T_1) \leq a\}.$$

Logo,  $A_a \subset A_b$ .

**Prova:** Por questão de conveniência, denotemos  $\mathbb{E}_0(T_1)$  por  $\mathbb{E}(\alpha, \beta)$ . Se  $(\alpha, \beta) \in A_a$ , então  $\mathbb{E}(\alpha, \beta) \leq a$ . Logo,  $\mathbb{E}(\alpha, \beta) \leq b$ . Daí,  $(\alpha, \beta) \in A_b$ . ■

Como pode ser visto na Figura 10, a variável aleatória  $T_1|\{Z_0 = 0\}$  tem distribuição geométrica no conjunto  $\{1, 2, 3, \dots\}$  com parâmetro  $\beta(1 - \alpha)$ . Logo,

$$\mathbb{E}_0(T_1) = \frac{1}{\beta(1 - \alpha)}. \quad (2.56)$$

**Proposição 2.9.1.** *Sejam  $N \in \mathbb{Z}_+$  e  $Z_0^N = 0$ . Se  $\beta \leq \frac{1}{(1 - \alpha)N!}$ , então o tempo médio de absorção ocorre de forma ao menos superexponencial.*

**Prova:** Tomemos  $N \in \mathbb{Z}_+$  e  $M \in \mathbb{R}_+$  tal que  $M \geq N!$ . Seja  $A_a$  como definido no Lema 2.9.1. Logo,  $A_{N!} \subset A_M$ . Assim, existe conjunto  $B_M$ , onde

$$A_M = A_{N!} \cup B_M \text{ e } A_{N!} \cap B_M = \emptyset.$$

Logo, podemos escrever  $B_M$  da forma

$$\begin{aligned} B_M &= A_M - A_{N!} \\ &= \{(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2 : N! \leq \mathbb{E}_0(T_1) \leq M\}. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \bigcup_{M \in \mathbb{R}_+ : M \geq N!} B_M &= \{(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2 : N! \leq \mathbb{E}_0(T_1)\} \\ &= \left\{ (\alpha, \beta) \in (0, 1)^2 : \beta < \frac{1}{(1 - \alpha)N!} \right\}. \end{aligned}$$

Assim, usando as identidades  $\mathbb{E}_0(T_1) = \mathbb{E}_0(H_1)$  e (2.56) na desigualdade provada no Lema 2.9.1,  $\mathbb{E}_0(H_1) \leq \mathbb{E}_0(H_N)$  para  $n \in \mathbb{Z}_+$ , obtemos que se  $\beta < \frac{1}{(1 - \alpha)N!}$ , então  $N! < \mathbb{E}_0(T_1)$ . Logo,  $N! < \mathbb{E}_0(H_N)$ . ■

### 2.9.1 O Processo $L^3$

Definimos uma cadeia de nascimento e morte  $(L_t^3)_{t \in \mathbb{Z}_+}$  com espaço de estados  $\mathbb{Z}_+$  e as seguintes probabilidades de transição:

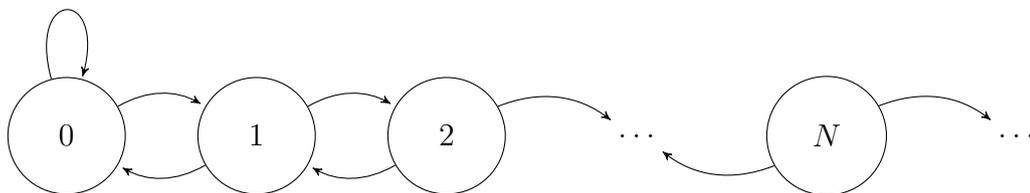
$$\mathbb{P}(L_{t+1}^3 = m | L_t^3 = n) = \begin{cases} \mathbb{P}(Z_{t+1} = 0 | Z_t = 0), & \text{se } m = n = 0, \\ \mathbb{P}(Z_{t+1} = 1 | Z_t = 0), & \text{se } m = 1 \text{ e } n = 0, \\ \mathbb{P}(Z_{t+1} = n - 1 | Z_t = n) + \mathbb{P}(Z_{t+1} = n | Z_t = n), & \text{se } m = n - 1 \text{ e } n > 0, \\ \sum_{l=n+1}^{2n+1} \mathbb{P}(Z_{t+1} = l | Z_t = n), & \text{se } m = n + 1 \text{ e } n > 0, \\ 0, & \text{se } m = n \text{ e } n > 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

Usando (2.8), podemos reescrever (2.57) da seguinte forma

$$\mathbb{P}(L_{t+1}^3 = m | L_t^3 = n) = \begin{cases} \beta(1 - \alpha), & \text{se } m = 1 \text{ e } n = 0, \\ 1 - \beta(1 - \alpha), & \text{se } m = n = 0, \\ (1 - \beta)^n [(1 - \beta) + (n + 1)\alpha\beta], & \text{se } m = n - 1 \text{ e } n > 0, \\ 1 - (1 - \beta)^n [(1 - \beta) + (n + 1)\alpha\beta], & \text{se } m = n + 1 \text{ e } n > 0, \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (2.58)$$

Na Figura 12, é ilustrado o diagrama de transição do processo  $L^3$ .

**Figura 12 – Diagrama de transição do processo  $L^3$ .**



Fonte: Autoria Própria.

**Lema 2.9.3.** Para  $m, n \in \mathbb{Z}_+$ , denotamos  $\mathbb{P}(L_{t+1}^3 = m | L_t^3 = n) = q_{nm}$ .

- (a) A sequência  $(q_{nn+1})_{n \in \mathbb{Z}_+}$  é crescente.
- (b) A sequência  $(q_{nn-1})_{n \in \mathbb{Z}_+}$  é decrescente.

**Prova:** Mostraremos o item (a). Para  $t = 0$ , temos

$$\begin{aligned}
 q_{01} &= 1 - (1 - \beta)[(1 - \beta) + 2\alpha\beta] \\
 &= 1 - (1 - \beta)^2 - 2\alpha\beta(1 - \beta) \\
 &= 1 - 1 + 2\beta - \beta^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha\beta^2 \\
 &= \beta - \alpha\beta + [\beta - \alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\beta^2] \\
 &> \beta(1 - \alpha) = q_{00}.
 \end{aligned}$$

Agora, para  $n > 0$

$$\begin{aligned}
 q_{nn+1} &= 1 - (1 - \beta)^{n+1}[(1 - \beta) + (n + 2)\alpha\beta] \\
 &= 1 - (1 - \beta)^{n+1}(1 - \beta) - (n + 1)\alpha\beta(1 - \beta)^n(1 - \beta) - (1 - \beta)^{n+1}\alpha\beta \\
 &= 1 - (1 - \beta)^{n+1} + \beta(1 - \beta)^{n+1} - (n + 1)\alpha\beta(1 - \beta)^n + (n + 1)\alpha\beta^2(1 - \beta)^n \\
 &\quad - (1 - \beta)^{n+1}\alpha\beta \\
 &= 1 - (1 - \beta)^n[(1 - \beta) + (n + 1)\alpha\beta] + \beta(1 - \beta)^{n+1} - (1 - \beta)^n\alpha\beta + (1 - \beta)^n(n + 1)\alpha\beta^2 \\
 &= q_{n-1n} + \beta(1 - \beta)^{n+1} - (1 - \beta)^n\alpha\beta + (1 - \beta)^n(n + 1)\alpha\beta^2.
 \end{aligned}$$

Usando que  $\beta(1 - \beta)^{n+1} - \alpha\beta(1 - \beta)^{n+1} > 0$  e  $(n + 1)\alpha\beta^2(1 - \beta)^n > 0$ , temos

$$q_{nn+1} > q_{n-1n}.$$

Para provar do item (b), basta usar o fato que  $q_{nn-1} = 1 - q_{nn+1}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

■

Tomemos outra cadeia de nascimento e morte,  $(L_t^{const})_{t \in \mathbb{Z}_+}$ , no mesmo espaço de estados do processo  $L^3$  e para cada estado  $i$ , suas probabilidades de transição são constantes e iguais a  $\frac{1}{2}$  no espaço e tempo, isto é,

$$q_{nm+1}^{L^{const}} = q_{nn-1}^{L^{const}} = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.59)$$

**Lema 2.9.4.** *Dado que  $L_0^{const} = 0$ , então, o tempo médio até o processo atingir um estado  $j$  maior ou igual a  $N$ ,  $k_0^N$ , é polinomial de grau dois.*

**Prova:** Pelo **Auxiliar 12**,  $k_0^N$  é obtido como a solução minimal não negativa do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} k_0^N &= 1 + \frac{1}{2}k_0^N + \frac{1}{2}k_1^N \\ &\vdots \\ k_i^N &= 1 + \frac{1}{2}k_{i-1}^N + \frac{1}{2}k_{i+1}^N, \text{ para } i \in \{1, \dots, N-1\} \\ &\vdots \\ k_N^N &= k_{N+1}^N = k_{N+2}^N = \dots = 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

Observe que

$$k_0^N = 1 + \frac{1}{2}k_0^N + \frac{1}{2}k_1^N \Leftrightarrow k_0^N = 2 + k_1^N.$$

Usando essa igualdade na segunda equação de (2.60), obtemos  $k_1^N = 4 + k_2^N$ . Usando essa igualdade na terceira equação de (2.60), obtemos  $k_2^N = 6 + k_3^N$ . Seguindo com essa argumentação, concluímos que  $k_i^N = 2(i+1) + k_{i+1}^N$ , para  $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ .

Usando estas identidades e o fato que  $k_N^N = k_{N+1}^N = k_{N+2}^N = \dots = 0$ , obtemos

$$k_0^N = 2 + k_1^N = 2 + 4 + k_2^N = 2 + 4 + 6 + \dots + 2N + k_N^N = N^2 + N. \quad \blacksquare$$

**Proposição 2.9.2.** *Sejam  $Z_0 = 0$  e  $\beta \geq \frac{1}{2(1-\alpha)}$ . Então  $\mathbb{E}_0(T_N)$ , para  $T_N$  definido em (2.55), é no máximo polinomial de grau dois.*

**Prova:** Consideramos o seguinte acoplamento entre os processos  $L^3$  e  $Z$ , com  $L_0^3 = Z_0 = 0$  temos: (a) se  $Z$  decresce uma unidade ou permanece no mesmo estado, pela definição das probabilidades de transição de  $L^3$ , teremos que  $L^3$  decresce uma unidade; (b) se  $L^3$  cresce uma unidade, pela definição das probabilidades de transição de  $L^3$ , teremos que  $Z$  cresce ao menos uma unidade. Assim, concluímos que

$$\mathbb{P}_0(L_t^3 \leq Z_t) = 1, \forall t \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.61)$$

Seja  $q_{nm}$  a probabilidade de transição do estado  $n$  para o estado  $m$  do processo  $L^3$ . Tomando  $\beta \geq \frac{1}{2(1-\alpha)}$  e o Lema 2.9.3, em que a sequência  $(q_{nn+1})_{n \in \mathbb{Z}_+}$  é crescente, concluímos que  $q_{nn+1} \geq q_{01} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{Z}_+$ . Assim, considerando um acoplamento entre  $L^{const}$  e  $L^3$ , com  $L_0^{const} = L_0^3 = 0$ , concluímos que

$$\mathbb{P}(L_t^{const} < L_t^3) = 1, \forall t \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.62)$$

De (2.61) e (2.62), temos que se  $\beta \geq \frac{1}{2(1-\alpha)}$ , então

$$\mathbb{P}_0(L_t^{const} \leq Z_t) = 1, \forall t \in \mathbb{Z}_+.$$

Daí, para  $k_0^N$  definido no Lema 2.9.4, temos

$$\mathbb{E}_0(T_N) \leq k_0^N = N^2 + N. \quad \blacksquare$$

**Prova do Teorema 2.2.4:** Seja  $s$  a configuração todas menos. Entre cada segmento  $\{s_i, s_{i+1}\}$ , associamos o processo  $(Z_t^{ii+1})_{t \in \mathbb{Z}_+}$  com  $Z_0 = 0$  (ver seção 2.4). Para cada posição  $i \in \mathbb{Z}_+$ , é evidente que o processo  $Z^{ii+1}$  ocorre de forma independente ao que acontece nas outras posições. Logo,  $(T_N^i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$  onde

$$T_N^i = \inf\{t \geq 0 : Z_t^{ii+1} \geq N\}$$

é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Devido ao exposto, denotaremos  $Z^{ii+1}$  e  $T_N^i$  por  $Z$  e  $T_N$  respectivamente.

Observando a evolução da palavra  $W = \ominus$  sob ação do operador  $\widetilde{\mathbf{VS}}$ ,  $W_t$ , temos

$$d_{W_t}(\ominus) = \frac{q_{W_t}(\ominus)}{1 + q_{W_t}(\ominus)} = \frac{Z_t}{Z_t + 1}.$$

Logo,

$$T_N = \inf\left\{t \geq 0 : d_{W_t}(\ominus) \geq \frac{N}{N+1}\right\},$$

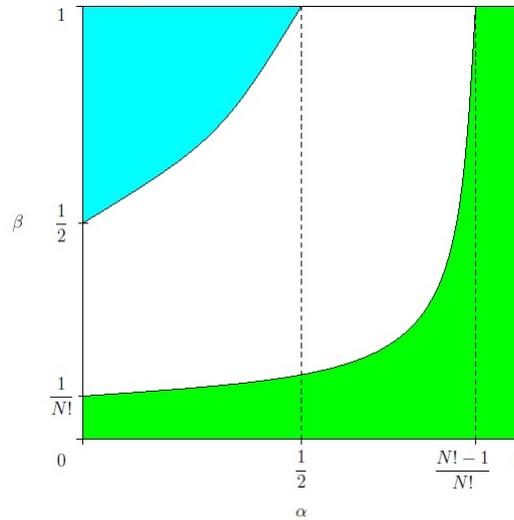
implicando que  $\mathbb{E}_0(T_N) = \tau_N$ .

Usando as proposições 2.9.1 e 2.9.2, provamos os itens (b) e (a) respectivamente. \blacksquare

Sendo  $\tau_N$  o tempo para que a densidade de mais no processo  $\mathbf{VS}$  seja maior ou igual a quantidade  $\frac{N}{N+1}$ , então o item (a) do teorema 2.2.4 nos dá um limitante superior para este tempo médio quando  $\beta \geq \frac{1}{2(1-\alpha)}$ . Por outro lado, o item (b) do teorema 2.2.4 nos dá um limitante inferior para este tempo quando  $\beta \leq \frac{1}{(1-\alpha)N!}$ .

Dado o par  $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$ , o Teorema 2.2.4 mostra a existência de duas regiões de  $(0, 1)^2$  onde o tempo médio que o processo VS alcança pela primeira vez densidade de mais maior ou igual a  $\frac{N}{N+1}$ . A Figura 13 ilustra essas regiões. Em azul, temos os pares  $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$  tais que  $\tau_N$  é no máximo de ordem polinomial de grau dois; em verde, temos os pares  $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$  tais que  $\tau_N$  é no mínimo de ordem superexponencial. A região polinomial (azul) independe de  $N$ , mas a região superexponencial depende. Por isso, com o intuito de oferecer uma visualização fizemos a ilustração dessa região para um dado  $N$ .

**Figura 13** – *Regiões formadas pelos pares  $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$  para as quais  $\mathbb{E}_0(\tau_N)$  apresenta transição de fase.*



Fonte: Autoria Própria.

## 2.10 ESTUDO NUMÉRICO

Estudos numéricos são de amplo uso. Eles nos dão uma boa direção para seguirmos em nossas pesquisas. Faremos um estudo numérico do nosso processo VS. Optamos por simular o processo  $Z$  (ver seção 2.3).

Sejam  $T_i^1, T_i^2, \dots, T_i^N$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição  $T_i$ . Definimos  $T_i^{max} = \max\{T_i^1, T_i^2, \dots, T_i^N\}$ . A distribuição de  $T_1^{max}$  pode ser encontrada fazendo

$$\mathbb{P}_0(T_1^{max} \leq u) = \prod_{k=1}^N \mathbb{P}_0(T_1^k \leq u | Z_0 = 0) = \left[1 - (1 - \beta(1 - \alpha))^{\lfloor u \rfloor}\right]^N,$$

onde  $\lfloor u \rfloor$  é o maior valor inteiro que é menor que  $u$ , com  $u \in \mathbb{R}$ . Daí,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0(T_1^{max}) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_0(T_1^{max} \geq j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} [1 - \mathbb{P}_0(T_1^{max} \leq j)] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left[ 1 - \left( 1 - (1 - \beta(1 - \alpha))^{\lfloor j \rfloor} \right)^N \right] \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( 1 - (1 - \beta(1 - \alpha))^j \right)^N \right] \tag{2.63}
\end{aligned}$$

De maneira semelhante, dado  $T_i^{min} = \min\{T_i^1, T_i^2, \dots, T_i^N\}$ , podemos obter a distribuição de  $T_1^{min}$  fazendo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(T_1^{min} \leq u) &= 1 - \mathbb{P}_0(T_1^{min} > u) \\
&= 1 - \left[ \mathbb{P}_0(T_1^{min} > u) \right]^N \\
&= 1 - \left[ (1 - \beta(1 - \alpha))^{\lfloor u \rfloor} \right]^N.
\end{aligned}$$

E podemos calcular  $\mathbb{E}_0(T_1^{min})$  fazendo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0(T_1^{min}) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_0(T_1^{min} \geq j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_0(T_1^{min} > j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} [1 - \mathbb{P}_0(T_1^{min} \leq j)] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left[ (1 - \beta(1 - \alpha))^{\lfloor j \rfloor} \right]^N \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left[ (1 - \beta(1 - \alpha))^N \right]^j \\
&= \frac{1}{1 - (1 - \beta(1 - \alpha))^N}. \tag{2.64}
\end{aligned}$$

As expressões (2.56), (2.63) e (2.64) nos dão os tempos esperados das variáveis aleatórias  $T_1$ ,  $T_1^{max}$  e  $T_1^{min}$ , respectivamente, os quais serão úteis para analisarmos os tempos de alcance, servindo para "calibrar" e ou observar quão boas estão nossas simulações.

Na simulação de monte Carlo do processo  $Z$ , consideramos  $Z_0 = 0$ , e para cada par  $(\alpha, \beta)$ , com  $\alpha, \beta \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$ , simulamos o processo  $Z$  até que  $Z_t = i$  pela primeira vez.

Nós vamos descrever um procedimento que imita o processo  $Z$ . Este procedimento gera uma sequência de variáveis aleatórias da seguinte maneira.

Replicamos por 10 vezes o procedimento que imita o processo  $Z$ , Algoritmo 27. Em cada réplica, iniciamos o processo  $Z$  considerando  $Z_0 = 0$ . Tomamos  $\alpha, \beta \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$  e para cada par  $(\alpha, \beta)$ , observamos as estimativas do tempo mínimo, do tempo médio e do tempo máximo de alcance ao estado 1, os quais denotaremos por  $t_1^{min}$ ,  $\bar{t}_1$  e  $t_1^{max}$ , respectivamente.

---

**Algoritmo 1: PROCEDIMENTO QUE IMITA O PROCESSO  $Z$** 


---

**Entrada:**  $Z_0 = 0, t = 0, i$

**Saída:** Tempo  $t$ , em que o processo  $Z$  atinge o estado  $i$  pela primeira vez, com

$$i \in \mathbb{Z}_+$$

```

1 início
2   Fixe  $\alpha$  e  $\beta$  no intervalo  $[0, 1]$ 
3   para  $Z_{t+1}$  faça
4     para variável aleatória  $B$  com distribuição binomial,  $\text{bin}(Z_t + 1, \beta)$  faça
5        $Y = Z_t + B$ 
6     fim
7     para variável aleatória  $U$  com distribuição uniforme,  $U \in [0, 1]$  faça
8       se  $Y = 0$  então
9          $Z^{t+1} = 0$ 
10      fim
11      se  $Y > 0$  e  $U < \alpha$  então
12         $Z_{t+1} = Y - 1$ 
13      fim
14      se  $Y > 0$  e  $U > \alpha$  então
15         $Z_{t+1} = Y$ 
16      fim
17    fim
18    se  $Z_{t+1} < i$  então
19       $t = t + 1$ 
20    fim
21    se  $Z_{t+1} \geq i$  então
22       $t = t$ 
23    fim
24    repita o passo 3 até  $Z_{t+1} \geq i$ 
25  fim
26 fim
27 retorna  $t$ 

```

---

### 2.10.1 Verificando a Implementação

Em (2.56), (2.63) e (2.64), nós obtivemos o valor esperado para  $T_1^{min}$ ,  $T_1$  e  $T_1^{max}$ , respectivamente. Destes resultados, podemos verificar o quão próximas as nossas estimativas estão dos seus respectivos valores esperados. Fixando  $\beta = 0.05$ , o gráfico da Figura 14 mostra, em vermelho, as estimativas de  $t_1^{min}$ ,  $\bar{t}_1$  e  $t_1^{max}$  respectivamente e, em azul, os valores esperados reais  $T_1^{min}$ ,  $\bar{T}_1$  e  $T_1^{max}$ .

Qualitativamente, a trajetória das estimativas  $t_1^{min}$ ,  $\bar{t}_1$  e  $t_1^{max}$  seguiram a trajetória dos valores esperados reais  $T_1^{min}$ ,  $\bar{T}_1$  e  $T_1^{max}$  apresentando certa flutuação. Tais flutuações são aceitáveis, uma vez que os resultados da simulação são pseudo aleatórios, enquanto os valores esperados reais nos dão uma tendência de como o processo se comporta.

### 2.10.2 Análise do Processo Z

No Teorema 2.2.4, mostramos que o tempo médio da densidade de uns no processo VS ser maior ou igual a uma constante apresenta transição de fase. Em (2.56), vimos que o tempo que o processo  $Z$  atinge o estado 1 pela primeira vez, dado que o processo iniciou no estado 0, é descrito por uma variável aleatória geométrica de parâmetro  $\beta(1 - \alpha)$ . Assim, vimos que  $\mathbb{E}_0(T_1) = 1/\beta(1 - \alpha)$ . Fixando  $\beta$ , temos que  $\mathbb{E}_0(T_1)$  cresce à medida que  $\alpha$  cresce para 1. Em adição, como  $\mathbb{E}_0(T_1) \geq \mathbb{E}_0(T_N)$ , conseqüentemente  $\mathbb{E}_0(T_N)$  aumenta à medida que  $\alpha$  cresce para 1. Fixando  $\beta = 0.05$  e  $Z_0 = 0$ , realizamos 10 repetições independentes do processo que imita o processo  $Z$  e estimamos o tempo médio que o processo atinge ou ultrapassa o estado  $N$  pela primeira vez,  $\bar{t}_N$ , considerando  $N \in \{2, 3, 4\}$ . Na Figura 15, nós apresentamos as estimativas de  $\bar{t}_N$ . Como no caso em que  $N = 1$ , as estimativas para o tempo médio que o processo  $Z$  atinge ou supera o estado  $N$  pela primeira são maiores quando  $\alpha$  é um valor próximo de 1.

Em todas as análises que fizemos sobre as estimativas de  $\bar{t}_1$ , confirmamos que quanto maior o parâmetro  $\alpha$ , maior o tempo associado a ele. Para  $Z_0 = 0$  e  $\beta = 0.05$ , realizamos o procedimento que imita o processo  $Z$  para estimar o tempo médio que o processo  $Z$  atinge ou ultrapassa o estado  $i$  pela primeira vez,  $\bar{t}_i$ . Para cada  $i$  fixo, realizamos 10 repetições independentes do procedimento que imita o processo  $Z$ . Por exemplo, para  $\alpha = 0.88$  e  $\beta = 0.05$ , nossas estimativas para  $\bar{t}_N$ , com  $N \in \{2, 3, 4\}$  foram:  $\bar{t}_2 = 11,790.1$ ;  $\bar{t}_3 = 152,566.09$  e  $\bar{t}_4 = 2,769,574$ .

No Teorema 2.2.4, mostramos que o tempo médio da densidade de uns no processo

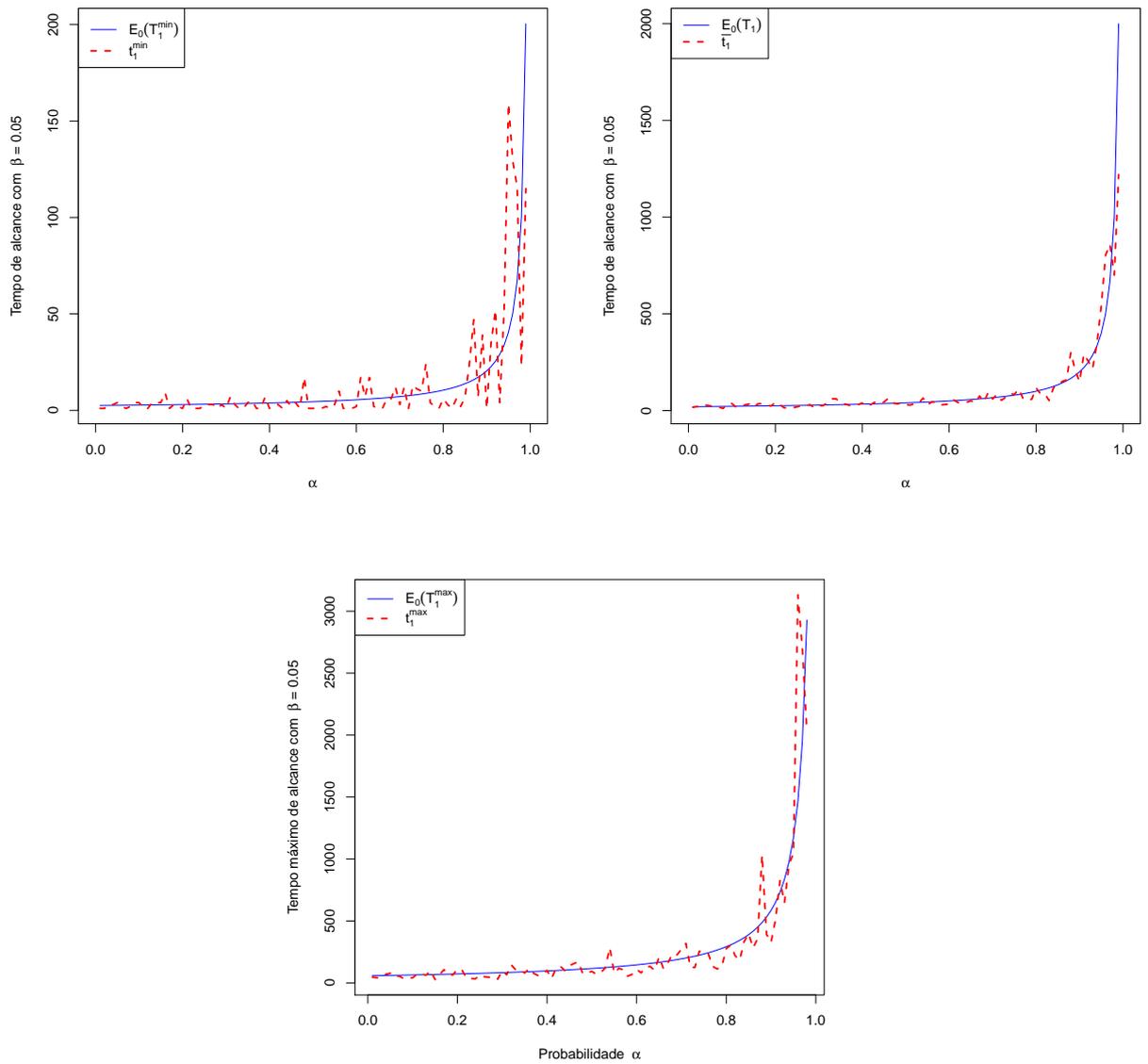
VS ser igual ou maior que uma constante apresenta transição de fase: se  $\alpha$  é próximo de zero e  $\beta$  é próximo de um, este tempo médio é no máximo de ordem polinomial de grau dois; se  $\alpha$  é próximo de um  $\beta$  é próximo de zero, este tempo médio é no mínimo superexponencial.

Dados  $Z_0 = 0$ ,  $(\alpha, \beta) = (0.01, 0.99)$  e para cada  $N \in \{1, 2, \dots, 1000\}$ , nós realizamos 200 experimentos numéricos independentes do processo  $Z$ . Em cada experimento, finalizamos o procedimento quando obtivemos  $t$  tal que  $Z_t \geq N$  pela primeira vez. Assim, nós estimamos  $\mathbb{E}_0(T_N)$ ,  $\bar{t}_N = 1/200(t_1 + \dots + t_{200})$ . O conjunto das estimativas nos deu uma informação qualitativa. Como mostrado no Teorema 2.2.4, a Figura 16 ilustra um crescimento do processo em uma velocidade inferior a uma velocidade com crescimento polinomial, onde os valores no eixo da abscissa, os quais se referem ao estado analisado, estão escritos na forma  $\log(N)$ . Nós realizamos o ajuste da reta ou modelo de regressão linear simples [31]. Usamos a função  $lm()$  no software  $R$  e consideramos a variável resposta sendo o tempo médio que o processo  $Z$  atinge ou ultrapassa o estado  $N$  pela primeira vez,  $\bar{t}_N$ , e a variável explicativa sendo  $\log(N)$ . No que se refere a correlação entre as variáveis  $\bar{t}_N$  e  $\log(N)$ , vimos que ela é igual a 0,9873, indicando que as variáveis tem correlação positiva forte, o que significa que a variável dependente cresce quase na mesma proporção da variável independente. O comportamento qualitativo do gráfico nos dá indícios de um crescimento logarítmico, nos permitindo fazer a seguinte conjectura.

**Conjectura 2.10.1.** *Sejam  $N$  um valor natural e  $\tau_N = \inf \left\{ t \geq 0 : \delta_{\ominus^z} \mathbf{VS}^t(\oplus) \geq \frac{N}{N+1} \right\}$ . No espaço de parâmetros  $\alpha \times \beta$ , existe região  $A$  tal que  $\tau_N$  é de ordem logarítmica.*

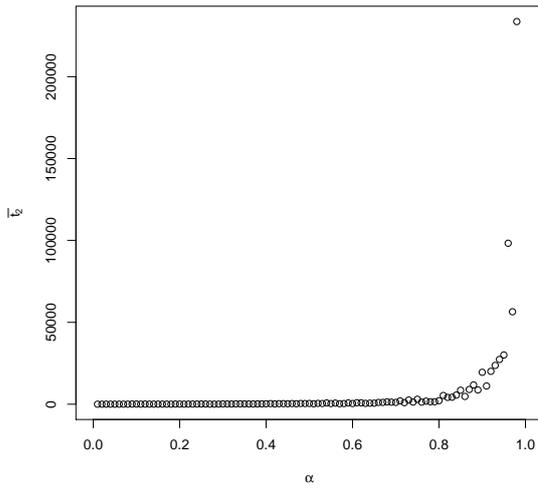
Realizamos a simulação do Algoritmo 27 utilizando linguagem de programação  $C_{++}$  e para a análise dos dados e a criação dos gráficos, nós utilizamos o *software* estatístico  $R$ (<https://www.r-project.org/>).

Figura 14 – *Estimativas dos tempos alcance,  $t_1^{min}, \bar{t}_1, t_1^{max}$  respectivamente, e seus respectivos valores esperados reais,  $\mathbb{E}(T_1^{min}), \mathbb{E}(T_1)$  e  $\mathbb{E}(T_1^{max})$ .*

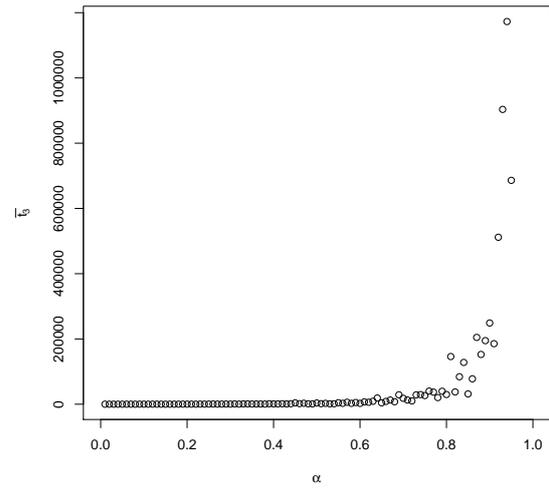


Fonte: Autoria Própria.

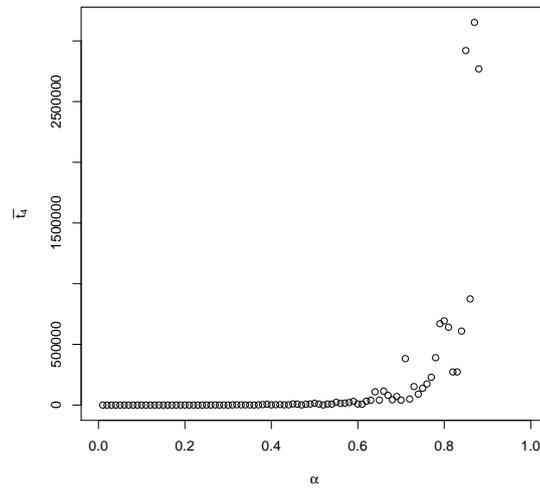
Figura 15 – *Estimativas de  $\mathbb{E}_0(T_N)$  com  $Z_0 = 0$ ,  $\beta = 0.05$  e  $N \in \{2, 3, 4\}$ .*



(a)  $N = 2$



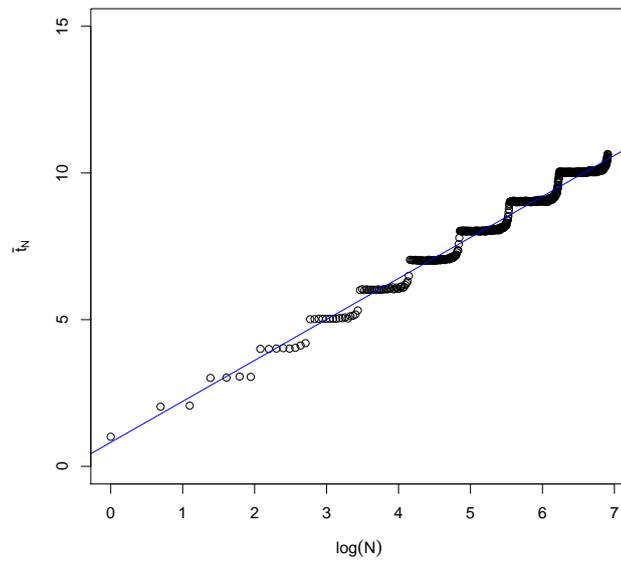
(b)  $N = 3$



(c)  $N = 4$

Fonte: Autoria Própria.

Figura 16 – *Estimativas de  $\mathbb{E}_0(T_N)$  com  $N \in \{1, 2, \dots, 1000\}$  e  $(\alpha, \beta) = (0.01, 0.99)$ .*



Fonte: Autoria Própria.

### 3 O PROCESSO DE STAVSKAYA DE DIFUSÃO

#### 3.1 EQUAÇÃO DE ONDA LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM

Uma Equação Diferencial Parcial, EDP por simplicidade, é uma equação que envolve uma função desconhecida e diferenciável de duas ou mais variáveis independentes e algumas de suas derivadas parciais. De maneira formal, sejam um valor inteiro  $k \geq 1$  e  $U$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ . A expressão

$$f(D^k u(\vec{x}), D^{k-1} u(\vec{x}), \dots, Du(\vec{x}), u(\vec{x}), \vec{x}) = 0 \text{ com } \vec{x} \in U$$

é chamada a equação diferencial parcial de ordem  $k$ , onde  $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$  é dada,  $D^k u(\vec{x})$  é o conjunto de todas as derivadas parciais de ordem  $k$  e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função desconhecida [31]. Uma EDP é dita ser de ordem  $k$  quando a derivada parcial de maior grau na identidade possui ordem  $k$  [32].

Sejam  $x \in \mathbb{R}$  e  $t \in [0, \infty)$  duas variáveis independentes à variável dependente  $u = u(x, t)$ , com  $u$  diferenciável. A bem conhecida equação de onda linear de 1ª ordem (ver [32] p. 10) é dada por

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

sendo  $c$  uma constante real. A equação (3.1) pode ser usada para modelar: poluição, dispersão de corante, ou mesmo fluxo de tráfego com  $u$  representando a densidade do poluente (dispersão ou tráfego) na posição  $x$  e no tempo  $t$  [32].

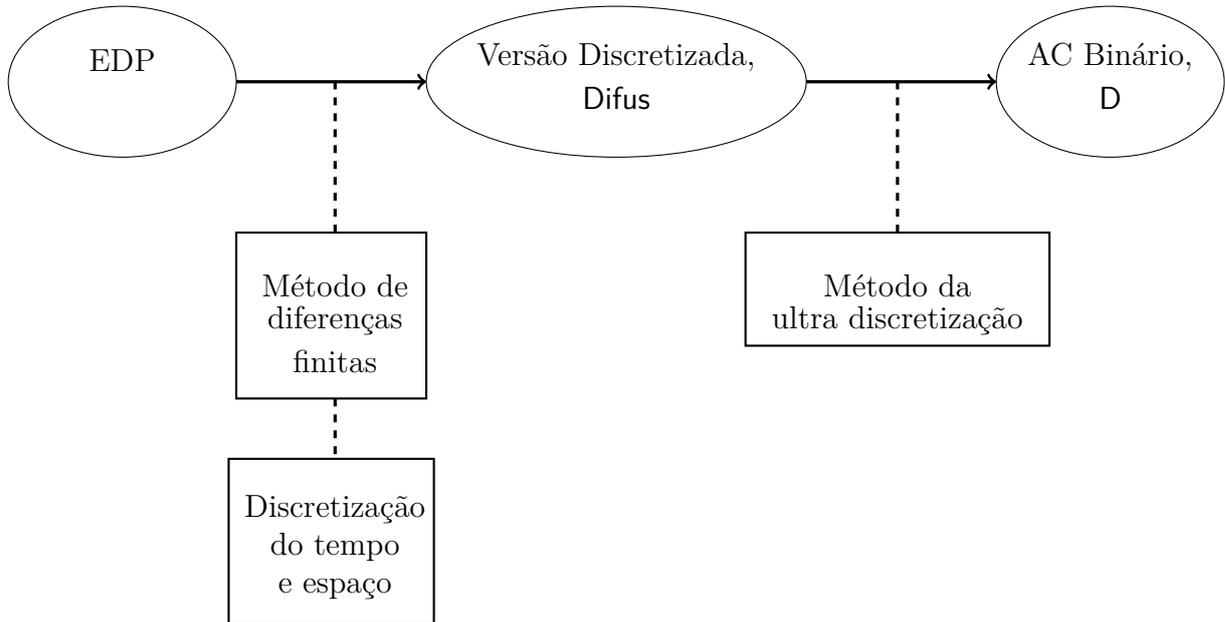
Pode ser provado (ver Apêndice 4) que a solução de (3.1) é dada por  $u(x, t) = f(x - ct)$ , onde  $u(x, 0) = f(x)$ . Ela é uma das EDP's mais simples de serem resolvidas e não necessita de condições de contorno [31].

Podemos pensar em (3.1) como uma derivada direcional da função  $u(x, t)$  na direção  $\vec{v} = (c, 1)$ , com  $\vec{v}$  sendo um vetor do espaço  $(x, t)$ . Logo, a função  $u(x, t)$  é constante em cada reta paralela ao vetor  $\vec{v}$  e é uma função que depende apenas de  $x - ct = x_0$  para cada constante  $x_0$ , isto é,

$$u(x, t) = f(x - ct). \quad (3.2)$$

É possível usar métodos de discretização para obter autômatos celulares a partir de equações diferenciais parciais [33, 34, 35, 36]. Na Figura 17, nós ilustramos um esquema que nos permitirá obter o operador D partir da Equação de Onda via ultra discretização.

Figura 17 – *Esquema da obtenção de um autômato celular binário a partir de uma equação diferencial parcial.*



Fonte: Autoria Própria.

### 3.2 DA EQUAÇÃO DE ONDA AO OPERADOR D

O uso de diferenças finitas é bastante comum para analisar EDP (ver [37] p. 163). Faremos uma discretização de (3.1) utilizando o método de Euler padrão para as discretizações temporal e espacial com  $c$  negativo, a qual é dada por:

$$\frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{\Delta_t} + c \frac{u_{i+1}^t - u_i^t}{\Delta_x} = 0. \quad (3.3)$$

Nós utilizamos  $\Delta_t = \Delta_x = 1$  e  $i \in \mathbb{Z}$ . Daí, (3.3) pode ser reescrita por

$$u_i^{t+1} = (1 + c)u_i^t - cu_{i+1}^t. \quad (3.4)$$

Por simplicidade de notação, usaremos a notação *Difus* para o operador determinístico que atua na forma iterativa da equação de diferença parcial (3.4). Ou seja,

$$(uDifus)_i^{t+1} = (1 + c)u_i^t - cu_{i+1}^t.$$

É bem conhecido que equações de diferenças podem ser obtidas a partir de equações diferenciais, discretizando-se as variáveis independentes, tempo e espaço. O método da *ultra discretização* foi proposto por [39].

Com o advento dos computadores digitais, a simulação de modelos de partículas interagentes, obedecendo regras abstratas, têm crecido significativamente. Neste sentido,

autômatos celulares podem ser utilizados na formulação de leis físicas, capturando apenas o essencial de um fenômeno físico e tornando-se uma alternativa viável se comparados às descrições clássicas baseadas em equações diferenciais. No estudo numérico de equações diferenciais, estão presentes o uso de métodos como o de Euler, que visa obter uma equação de diferença. Por sua vez, o método da ultra discretização associa equações de diferenças a autômatos celulares [34, 39, 40, 41]. Acreditamos que o nome, ultra discretização, se deve ao fato deste método limite ser aplicado a um modelo discretizado, sendo obtido, após aplicação do limite, um modelo de autômato celular binário.

Trata-se de uma técnica que permite transformar uma equação de diferença parcial em outra equação de diferença parcial [39, 40]. Em particular, autômatos celulares também podem ser obtidos através deste método de discretização das variáveis dependentes. Por exemplo, no sistema dinâmico *box-ball systems*, que utiliza um modelo de autômato celular [36, 37, 42, 43].

No método da ultra discretização, a variável dependente  $u_n$  é substituída por

$$u_n = \exp\left(\frac{S_n}{\epsilon}\right),$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro positivo. A solução *max-plus*, ou equação de diferenças parciais construída a partir da ultra discretização [34, 35], é obtida tomando-se o limite  $\epsilon \rightarrow 0^+$  e do uso da identidade

$$\max\{A_1, \dots, A_n\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \log \left[ \sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{A_k}{\epsilon}\right) \right], \quad (3.5)$$

onde  $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 3.2.1.** *Se  $c \in (-1, 0)$ , então a equação max-plus de Difus via ultra discretização é D.*

**Prova:** Sejam  $a = \max\{1 + c, -c\}$  e  $b = \min\{1 + c, -c\}$ . Temos de Difus que,

$$b(u_i^t + u_{i+1}^t) \leq (uDifus)_i^{t+1} \leq a(u_i^t + u_{i+1}^t). \quad (3.6)$$

Fazendo  $u_i^t = \exp\left(\frac{S_i^t}{\epsilon}\right)$ , temos que o lado direito e esquerdo de (3.6) são reescritos por

$$\epsilon \ln(b) + \epsilon \ln \left[ \exp\left(\frac{S_i^t}{\epsilon}\right) + \exp\left(\frac{S_{i+1}^t}{\epsilon}\right) \right] \leq \epsilon \ln(a) + \epsilon \ln \left[ \exp\left(\frac{S_i^t}{\epsilon}\right) + \exp\left(\frac{S_{i+1}^t}{\epsilon}\right) \right],$$

respectivamente.

Tomando  $\epsilon \rightarrow 0^+$  e usando (3.5), temos que ambos os lados tem o mesmo limite, o qual é dado por  $\max\{S_i^t, S_{i+1}^t\}$ .



Do Teorema 3.2.1, nós relacionamos o operador determinístico  $D$  no processo de Stavskaya com a equação de diferença parcial  $Difus$ . Como  $u_i^t \in [1, \infty)$  para  $\{i, t\} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ , teremos  $S_i^t \in \{0, 1\}$  para  $\{i, t\} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ .

A equação max-plus obtida no Teorema 3.2.1 e sua correspondente equação de diferença parcial  $Difus$  ficam em equilíbrio quando  $S_i^0 = S_{i+1}^0$  ou  $u_i^0 = u_{i+1}^0, \forall i \in \mathbb{Z}$ . No primeiro caso, há exatamente duas condições iniciais invariantes. No segundo, há uma quantidade não enumerável de condições iniciais invariantes. Para este último caso, o Lema 3.2.1 formaliza esta condição de equilíbrio.

**Lema 3.2.1.** *Para a equação de diferença parcial  $Difus$ , temos*

$$(uDifus)_i^{t+1} = \sum_{k=0}^{t+1} \binom{t+1}{k} (1+c)^{t+1-k} (-c)^k u_{i+k}^0.$$

**Prova:** A relação em  $Difus$  é válida para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , logo, é suficiente mostrar para  $i = 0$ . Faremos a prova por indução em  $t$ .

**Base de Indução:** Para  $t = 0$ , temos

$$(uDifus)_0^1 = (1+c)u_0^0 - cu_1^0.$$

**Hipótese de Indução:**

$$(uDifus)_0^t = \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} (1+c)^{t-k} (-c)^k u_k^0$$

**Passo de Indução:** Pela hipótese de indução, a qual vale para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , temos

$$\begin{aligned} (uDifus)_0^{t+1} &= (1+c)u_0^t + (-c)u_1^t \\ &= (1+c) \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} (1+c)^{t-k} (-c)^k u_k^0 + (-c) \sum_{m=0}^t \binom{t}{m} (1+c)^{t+1-m} (-c)^m u_{1+m}^0 \\ &= \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} (1+c)^{t+1-k} (-c)^k u_k^0 + \sum_{m=0}^t \binom{t}{m} (1+c)^{t-m} (-c)^{m+1} u_{1+m}^0. \end{aligned}$$

No segundo somatório, faça  $k = m + 1$ , então

$$\begin{aligned}
(u\text{Difus})_0^{t+1} &= \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} (1+c)^{t-k} (-c)^k u_k^0 + \sum_{k=1}^{t+1} \binom{t}{k-1} (1+c)^{t+1-k} (-c)^k u_k^0 \\
&= (1+c)^{t+1} u_0^0 + \sum_{k=1}^t \binom{t}{k} (1+c)^{t-k} (-c)^k u_k^0 \\
&\quad + \sum_{k=1}^t \binom{t}{k-1} (1+c)^{t+1-k} (-c)^k u_k^0 + (-c)^{t+1} u_{t+1}^0 \\
&= (1+c)^{t+1} u_0^0 + \sum_{k=1}^t \binom{t+1}{k} (1+c)^{t-k} (-c)^k u_k^0 + (-c)^{t+1} u_{t+1}^0 \\
&= \sum_{k=0}^{t+1} \binom{t+1}{k} (1+c)^{t-k} (-c)^k u_k^0.
\end{aligned}$$

■

Há uma relação direta entre a EDP (3.1) com  $c \in (-1, 0)$  e nossa equação de diferença Difus. O Teorema 3.2.1 estabelece uma relação entre Difus e D. A partir deste ponto, vamos verificar se estes três sistemas são qualitativamente iguais.

O conceito de monotonicidade é largamente utilizado no estudo de sistemas determinísticos e estocásticos [7, 8, 11]. Dizemos que o operador  $D$  é monótono se dados  $s, w \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , onde  $s_i \leq w_i$  temos  $(sD)_i \leq (wD)_i$ . É evidente que  $D$  satisfaz esta condição.

Do Lema 1.1.1, vemos que o processo de Stavskaya é linear. Dizemos que um ACP é monótono se seu operador  $P$  é tal que se dadas duas medidas  $\mu$  e  $\nu$ , com  $\mu \prec \nu$ , temos que  $\mu P \prec \nu P$  (ver Apêndice 4).

Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$  funções distintas, com  $f(\cdot) \leq g(\cdot)$ . Sejam  $u(x, t, f)$  e  $u(x, t, g)$  as EDPs em (3.1) onde  $u(x, 0, f) = f(x)$  e  $u(x, 0, g) = g(x)$  respectivamente. Dizemos que  $u(x, t)$  é monótona se  $u(x, t, f) \leq u(x, t, g)$  para todo  $t \in \mathbb{Z}_+$ . Com efeito,  $u(x, t, f) = f(x - ct) \leq g(x - ct) = u(x, t, g)$ . Logo, a equação de onda (3.1) é monótona. Também, é fácil verificar que a EDP,  $u(x, t)$ , é linear se assumimos condição inicial  $u(x, 0) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ . Sejam  $F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$  e  $u(x, 0) = F(x)$ . Logo, por (3.2),  $u(x, t) = F(x - ct) = c_1 f(x - ct) + c_2 g(x - ct) = c_1 u(x, t, f) + c_2 u(x, t, g)$ .

Sejam  $(u_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$  e  $(w_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$  condições iniciais de Difus com  $c \in (-1, 0)$ . Se  $1 \leq u_i^0 \leq w_i^0$ , implicar  $(u\text{Difus})_i \leq (w\text{Difus})_i$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , então dizemos que Difus é monótono.

Seja  $u_{i,j}^t$  a equação de diferença parcial Difus no tempo  $t$  e posição  $i$  com condição inicial  $(u_{i,j}^0)_{i \in \mathbb{Z}}$ , onde  $u_{i,j}^0 \in [1, \infty)$  para  $\{i, j\} \in \mathbb{Z} \times \{1, 2, \dots, N\}$ . Dizemos que Difus é

linear se

$$(u\text{Difus})_i^t = \sum_{j=1}^N \lambda_k u_{i,j}^t,$$

onde  $\lambda_j \geq 0$  para  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  e  $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$ .

Desejamos saber se a monotonicidade e a linearidade presentes no operador D [8] e em  $u(x, t)$  também estão presentes em Difus. Os Lemas 3.2.2 e 3.2.3 estabelecem que sim.

**Lema 3.2.2.** *Difus é monótono.*

**Prova:** Usando (3.4),

$$(u\text{Difus})_i = (1 + c)u_i - cu_{i+1} \leq (1 + c)w_i - cw_{i+1} = (w\text{Difus})_i.$$

■

**Lema 3.2.3.** *Difus é linear.*

**Prova:** Suponha  $u_i^0 = \lambda_1 u_{i,1}^0 + \lambda_2 u_{i,2}^0 + \dots + \lambda_N u_{i,N}^0$ .

Usando o Lema 3.2.1,

$$\begin{aligned} (u\text{Difus})_i^t &= \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (1 + c)^{t-j} (-c)^j u_{i+j}^0 \\ &= \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (1 + c)^{t-j} (-c)^j \sum_{k=1}^N \lambda_k u_{i+j,k}^0 \\ &= \sum_{k=1}^N \lambda_k \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (1 + c)^{t-j} (-c)^j u_{i+j,k}^0 \\ &= \sum_{k=1}^N \lambda_k u_{i,k}^t. \end{aligned}$$

■

### 3.3 UM PROCESSO DE STAVSKAYA DE DIFUSÃO

Uma equação de diferença parcial estocástica é apresentada, a qual denotaremos PSD. Provaremos que sob certas condições, ao utilizarmos a ultra discretização, obtemos desta equação o processo de Stavskaya. Além disso, para o PSD, descrevemos algumas quantidades estatísticas e verificamos se alguns comportamentos qualitativos existentes no processo de Stavskaya são preservados neste novo processo.

Definimos o operador de *Stavskaya de Difusão*, **StavD**, pela composição de dois operadores, sendo o primeiro determinístico **Difus** :  $[1, \infty)^{\mathbb{Z}} \rightarrow [1, \infty)^{\mathbb{Z}}$  e o segundo aleatório, denotado por  $A_\alpha$  com  $\alpha \in [0, 1]$ . Assim,

$$\text{StavD} = \text{Difus} \circ A_\alpha.$$

Sob a ação do operador **Difus**, temos  $(u\text{Difus})_i^{t+1} = (1+c)u_i^t - cu_{i+1}^t$ , com  $c \in (-1, 0)$  e para todo  $\{i, t\} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ . Em seguida, o operador  $A_\alpha$  transforma cada  $u_i^t > 1$  em 1 com probabilidade  $\alpha$ , independente do que ocorre nas demais posições.

**Teorema 3.3.1.** *Seja  $c \in (-1, 0)$ . O Processo de Stavskaya é obtido através da ultra discretização da equação de diferença parcial estocástica*

$$u_i^{t+1} = \left( (1+c)u_i^t - cu_{i+1}^t \right)^{X_i^t} \quad (3.7)$$

onde  $(X_i^t)_{(i,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas onde  $\mathbb{P}(X_i^t = 0) = \alpha$  e  $\mathbb{P}(X_i^t = 1) = 1 - \alpha$ .

**Prova:** Sejam  $a = \max\{1+c, -c\}$  e  $b = \min\{1+c, -c\}$ . Logo,

$$\left[ b(u_i^t + u_{i+1}^t) \right]^{X_i^t} \leq u_i^{t+1} \leq \left[ a(u_i^t + u_{i+1}^t) \right]^{X_i^t}. \quad (3.8)$$

Tomamos  $u_i^t = \exp\left(\frac{S_i^t}{\epsilon}\right)$  para  $\epsilon > 0$ , implicando que os lados esquerdo e direito de (3.8) são resscritos por

$$\epsilon \ln(b)X_i^t + X_i^t \epsilon \ln \left[ \exp\left(\frac{S_i^t}{\epsilon}\right) + \exp\left(\frac{S_{i+1}^t}{\epsilon}\right) \right]$$

e

$$\epsilon \ln(a)X_i^t + X_i^t \epsilon \ln \left[ \exp\left(\frac{S_i^t}{\epsilon}\right) + \exp\left(\frac{S_{i+1}^t}{\epsilon}\right) \right],$$

respectivamente.

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , temos que ambos os lados têm o mesmo limite, o qual é dado por  $X_i^t \max\{S_i^t, S_{i+1}^t\}$ .

■

Tomamos  $\mathcal{B}$  uma  $\sigma$ -álgebra do conjunto  $[1, \infty)$ . Seja  $\mathbb{U} = [1, \infty)^{\mathbb{Z}}$  o espaço de configuração. Cada  $u \in \mathbb{U}$  é chamada uma configuração e pode ser descrito por  $u = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , onde cada  $u_i \in [1, \infty)$ .

Dada uma lista  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset \mathbb{Z}$ , chamaremos cilindro fino o conjunto

$$C = \{u \in \mathbb{U} : u_{i_1} \in B_{i_1}, \dots, u_{i_n} \in B_{i_n}\}, \quad (3.9)$$

onde  $B_{i_1}, \dots, B_{i_n} \in \mathcal{B}$ .

Seja  $\mathcal{N}$ , o conjunto das medidas de probabilidade em  $\mathbb{U}$ , isto é, na  $\sigma$ -álgebra gerada por (3.9). O nosso operador  $\text{StavD} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  e  $\mu\text{StavD}^t$  denota a  $t$ -ésima aplicação de  $\text{StavD}$  em  $\mu$ . Dizemos que  $\mu\text{StavD}^t$  converge para a medida  $\nu$  se para cada cilindro,  $C$ ,  $\mu\text{StavD}^t(C)$  converge para  $\nu(C)$  quando  $t$  tende para infinito.

O Teorema 3.3.1 nos dá uma família de equações de diferenças parciais estocásticas, as quais são levadas, via ultra discretização, ao processo de Stavskaya. De maneira semelhante a descrito em (1.3), a sequência dada por (3.7):  $u^0, u^1, \dots$  com respectivas distribuições  $\mu, \mu\text{StavD}, \mu\text{StavD}^2, \dots$ , onde  $u^0$  tem distribuição  $\mu \in \mathcal{N}$ , será chamada de *Processo de Stavskaya de Difusão*, ou PSD por simplicidade.

Para o PSD, quando  $\alpha = 0$ , há relação direta entre a equação de onda (3.1) e o processo determinístico  $D$ . Se  $\alpha = 1$ , então qualquer que seja a distribuição inicial em  $\text{Stav}$ , teremos que após a primeira iteração, todas as componentes  $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  são iguais a zero. Analogamente, qualquer que seja a condição inicial  $(u_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$ , teremos que  $u_i^t = 1, \forall i \in \mathbb{Z}$  e  $t \geq 1$ .

### 3.3.1 A propriedade da erosão

Seja  $D$  o operador de um autômato celular binário monótono em  $\mathbb{Z}$ . Dizemos que este autômato celular binário monótono possui a *propriedade da erosão* ou é *eroder* se para todo subconjunto finito  $A \in \mathbb{Z}$ , existe um tempo finito  $t \in \mathbb{N}$ , tal que a configuração inicial  $s$ , definida por  $s_i = 1$ , se  $i \in A$ , e  $s_i = 0$  se  $i \notin A$ , satisfaz  $D^t s = s^{(0)}$ , onde  $s^{(0)}$  é a configuração onde todas as componentes estão no estado 0. Neste sentido,  $s^{(0)}$  é dita ser um atrator para a trajetória do autômato celular. Logo, se apenas um número finito de componentes estiver no estado 1 inicialmente, então todas as componentes no sistema estarão no estado zero em tempo finito. Toom mostrou em [9], condições para as quais um autômato celular binário monótono é eroder. Uma definição de eroder para autômatos celulares probabilísticos pode ser vista em [44]. Lá, um ACP binário é dito ser eroder quando o tempo médio que o processo atinge um sistema com todas as componentes no estado 0 é finito.

Iremos definir o conceito de eroder para o PSD. Mas, antes introduzimos uma classe de distribuições iniciais.

Chamaremos  $\mu \in \mathcal{N}$  de  $\mu$ -ilha se existir valor  $M \in [1, \infty)$  e  $i < j \in \mathbb{Z}$  tais que

$$\begin{aligned} \mu(u_k = 1) = 1, \text{ se } k < i \text{ ou } k > j; \\ \text{e} \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\mu(u_k \in [1, M]) = 1, \text{ se } k \in \{i, \dots, j\}.$$

Quando a  $\mu$ -ilha é concentrada em  $u \in \mathbf{U}$ , chamaremos  $u$  uma *ilha* e denotamos esta medida por  $\delta_u$ . O conjunto das  $\mu$ -ilhas é denotado por  $\mathcal{I}$ .

Em (3.10), se tomarmos  $M = 1$ , então  $\mu$  é a medida concentrada na configuração em que  $u_k = 1$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , a qual denotaremos por  $\delta_1$ .

Dada  $\mu \in \mathcal{I}$ , existem  $u \in \mathbf{U}$ ,  $M \in [1, \infty)$  e  $i < j$  tais que  $\mu(u_k^0 = 1) = 1$  se  $k < i$  ou  $k > j$ , e  $\mu(u_k^0 \in [1, M])$  se  $k \in \{i, \dots, j\}$ .

Dizemos que o PSD é eroder se  $\mathbb{P}(u_i^t = 1) \rightarrow 1$  com  $t \rightarrow \infty$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

Dadas  $u$  e  $w$ , nós dizemos que  $u$  *precede*  $w$ , se para todo  $i \in \mathbb{Z}$  temos

$$\mathbb{P}(u_i \leq w_i) = 1.$$

**Lema 3.3.1.** *Dadas ilhas  $(u_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$  e  $(w_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Se  $(u_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$  precede  $(w_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$ , então  $(u_i^t)_{i \in \mathbb{Z}}$  precede  $(w_i^t)_{i \in \mathbb{Z}}$  para todo  $t \in \mathbb{Z}_+$ .*

**Prova:** Faremos a prova por indução em  $t$ .

**Base de Indução:** Para  $t = 0$ , o resultado é imediato.

**Hipótese de Indução:** Para  $t = n$ , temos  $u_i^n \leq w_i^n$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

**Passo de Indução:** Para  $t = n + 1$ , reescrevemos cada  $u_i^{t+1}$  e  $w_i^{t+1}$  respectivamente por  $u_i^{t+1} = [(1+c)u_i^t - cu_{i+1}^t]^{X_i^t}$  e  $w_i^{t+1} = [(1+c)w_i^t - cw_{i+1}^t]^{Y_i^t}$ , onde  $X_i^t$  e  $Y_i^t$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas como no PSD.

Se realizarmos um acoplamento entre  $(u_i^{t+1})_{i \in \mathbb{Z}}$  e  $(w_i^{t+1})_{i \in \mathbb{Z}}$  e dado  $i \in \mathbb{Z}$ , então observando as partes determinísticas de  $u_i^{t+1}$  e  $w_i^{t+1}$ , temos  $(1+c)u_i^t - cu_{i+1}^t \leq (1+c)w_i^t - cw_{i+1}^t$ . Em seguida, há dois possíveis resultados: (a) se  $X_i^t = 0$ , então  $Y_i^t$  também será e  $u_i^{t+1} = w_i^{t+1} = 1$ ; (b) se  $X_i^t = 1$ , então  $Y_i^t$  também será e  $u_i^{t+1} = (1+c)u_i^t - cu_{i+1}^t \leq (1+c)w_i^t - cw_{i+1}^t = w_i^{t+1}$ . Em ambos os casos,  $u_i^{t+1} \leq w_i^{t+1}$ , para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

Daí, concluímos que  $\mathbb{P}(u_i^t \leq w_i^t) = 1$ , para todos  $\{i, t\} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ .

■

**Lema 3.3.2.** *Se  $\mu \in \mathcal{I}$ , então existe uma ilha  $\mathbf{u}$  tal que  $\mu(u_k > 1) \leq \delta_{\mathbf{u}}(u_k > 1)$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .*

**Prova:** Sejam  $\mu \in \mathcal{I}$  e  $M$  tal que  $\mu(u_k \in [1, M]) = 1$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$  tomemos  $u \in \mathbf{U}$  onde

$$u_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k < i \text{ ou } k > j; \\ M, & \text{se } k \in \{i, \dots, j\}. \end{cases}$$

Logo, para  $k < i$  ou  $k > j$  temos

$$\mu(u_k > 1) = \delta_{\mathbf{u}}(u_k > 1) = 0.$$

Para  $k \in \{i, \dots, j\}$ ,

$$\delta_{\mathbf{u}}(u_k > 1) = \delta_{\mathbf{u}}(u_k = M) = 1.$$

■

Dados  $t \in \mathbb{Z}_+$  e uma ilha  $\mathbf{u}$ , definimos seu *majorante* da ilha por  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  onde

$$\bar{u}_i = \begin{cases} u_i, & \text{se } i < k \text{ ou } i > j, \\ \max\{u_k, \dots, u_j\}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Quando  $\alpha = 0$ , apenas o operador determinístico atua na atualização do PSD. Logo, basta verificar o que ocorre quando  $\mathbf{u} \in [1, \infty)^{\mathbb{Z}}$ . O Teorema 3.3.2 descreve a ação do operador determinístico Difus em uma  $\mu$ -ilha. A Figura 18 ilustra a ação do operador determinístico do PSD atuando em uma ilha com  $u_7^0 = M$  e  $u_i^0 = 1$  para  $i \neq 7$  com  $c = -1/2$ . Observe que  $u_7^0 > u_7^1 > u_7^2 > \dots > u_7^t > \dots$ , o que forma uma sequência monótona decrescente que converge para 1 quando  $t \rightarrow \infty$ . Para  $i < 7$ , existe  $t_0 = 7 - i$  tal que  $u_i^t = 1$  para  $t < t_0$ . Em  $t_0$ , temos que  $u_i^{t_0} > 1$ . Pelo Teorema 3.3.2,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(u_i^t = 1) = 1$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , logo, existe  $t_1 > t_0$  tal que  $u_i^t$  é crescente para  $t \in \{t_0, \dots, t_1\}$  e para  $t \geq t_1$ ,  $u_i^t$  forma uma sequência decrescente que converge para 1.

Queremos mostrar que o PSD é eroder. No Teorema 3.3.2, mostramos que, atuando em  $\mu$ -ilhas concentradas em ilhas, o PSD converge para um sistema com todas as componentes assumindo o valor 1 quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Lema 3.3.3.** *Se  $\alpha \in \{0, 1\}$ , então o PSD é eroder.*

Figura 18 – *Ilustração da ação do operador determinístico do processo PSD, onde  $u_7^0 = M$  e  $u_j^0 = 1$  para  $j \neq 7$ .*

$t = 5$	$\cdots$	1	$\frac{M+31}{32}$	$\frac{5M+27}{32}$	$\frac{10M+22}{32}$	$\frac{10M+22}{32}$	$\frac{5M+27}{32}$	$\frac{M+31}{32}$	1	$\cdots$
$t = 4$	$\cdots$	1	1	$\frac{M+15}{16}$	$\frac{4M+12}{16}$	$\frac{6M+10}{16}$	$\frac{4M+12}{16}$	$\frac{M+15}{16}$	1	$\cdots$
$t = 3$	$\cdots$	1	1	1	$\frac{M+7}{8}$	$\frac{3M+5}{8}$	$\frac{3M+5}{8}$	$\frac{M+7}{8}$	1	$\cdots$
$t = 2$	$\cdots$	1	1	1	1	$\frac{M+3}{4}$	$\frac{2M+2}{4}$	$\frac{M+3}{4}$	1	$\cdots$
$t = 1$	$\cdots$	1	1	1	1	1	$\frac{M+1}{2}$	$\frac{M+1}{2}$	1	$\cdots$
$t = 0$	$\cdots$	1	1	1	1	1	1	$M$	1	$\cdots$
		$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
		$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$	

Fonte: Autoria Própria.

**Prova:** No PSD, se  $\alpha = 1$  e  $(u_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$ , temos  $\mathbb{P}(u_i^t = 1) = 1$ , para todo  $t \geq 1$ .

Agora, analisemos o caso em que  $\alpha = 0$ . Neste caso, o PSD atua de forma determinística, apenas ação do operador Difus. Assim, com  $\text{Difus} : [1, \infty)^{\mathbb{Z}} \rightarrow [1, \infty)^{\mathbb{Z}}$ , mostraremos com ilhas concentradas  $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ .

Sejam  $\alpha = 0$ ,  $d = \max\{1 + c, -c\}$  com  $c \in (-1, 0)$  e  $(u_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$  uma ilha.

Se  $i > j$ , o resultado é trivial. Assim, daremos atenção para  $i \leq j$ . Substituiremos  $(u_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$  por seu majorante  $(\bar{u}_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$  como condição inicial. Logo, temos valor  $M > 0$  tal que  $u_i^0 \leq M$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Mais especificamente

$$\bar{u}_i^0 = \begin{cases} M, & \text{se } i \in \{k, \dots, j\}; \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pelo Lema 3.3.1, é suficiente mostrar que o PSD com  $(\bar{u}_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$  sendo condição inicial, satisfaz (3.12).

Note que,

$$(u \text{Difus})_j^t = (1 + c)u_j^{t-1} - cu_{j+1}^{t-1} = (1 + c)u_j^{t-1} - c = (1 + c)^t M - c \sum_{l=0}^{t-1} (1 + c)^l \rightarrow 1,$$

com  $t \rightarrow \infty$ .

Além disso,  $u_j^{t+1} < u_j^t$  para todo  $t \in \mathbb{Z}_+$ . Agora, note que  $u_{j-1}^1 = u_{j-1}^0 = M$ . Como  $u_j^t < M$  para todo  $t \in \mathbb{Z}_+$ , temos  $u_{j-1}^{t+1} < u_{j-1}^t$  para todo  $t > 1$ . Como sabemos do cálculo diferencial, toda sequência monótona e limitada é convergente. Logo,  $u_{j-1}^t \rightarrow 1$  com  $t \rightarrow \infty$ . Agora note que  $u_j^2 = u_j^1 = u_j^0 = M$  e  $u_{j-1}^2 < M$ , logo,  $u_{j-2}^{t+1} < u_{j-2}^t$  para todo  $t > 2$ . Daí,  $u_{j-2}^t \rightarrow 1$  com  $t \rightarrow \infty$ . Podemos usar essa mesma argumentação para todo  $i \in \{k, \dots, j\}$ .

Para  $i < k$ , teremos que existem  $t_0 = k - i - 1$  e  $t_1$  tais que

$$u_i^t \text{ é } \begin{cases} \text{constante e igual a 1, para } t \in \{0, \dots, t_0\}; \\ \text{crescente para } t \in \{t_0 + 1, \dots, t_1\}; \\ \text{decrecente para } t > t_1. \end{cases}$$

Logo, concluímos que

$$u_i^t \rightarrow 1 \text{ com } t \rightarrow \infty.$$

■

**Teorema 3.3.2.** *Seja  $\alpha \in [0, 1]$ . Logo o PSD é eroder.*

**Prova:** Seja  $\mu \in \mathcal{I}$ . Pelo Lema 3.3.2, podemos tomar uma ilha  $u$  tal que  $u_k = 1$ , se  $k < i$  ou  $k > j$  e  $u_k = M$ , se  $k \in \{i, \dots, j\}$ . Neste caso,  $\mathbb{P}(u_k^t \leq (u\text{Difus})_k^t) = 1$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Mas, pelo Lema 3.3.3, para cada  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $(u\text{Difus})_k^t \rightarrow 1$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Daí,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(u_k^t = 1) = 1$ . Logo,  $\delta_u \text{StavD}^t \rightarrow \delta_1$ , o que implica que o operador **StavD** é eroder.

■

Vale observar que embora podemos obter o processo de Stavskaya por meio da ultradiscretização do PSD, o Lema 3.3.3 mostra, para  $\alpha = 0$ , que o PSD e o processo de Stavskaya são qualitativamente diferentes atuando em ilhas. No processo de Stavskaya, se iniciarmos o processo numa configuração cujo uma única componente está no estado 1 e as outras estão no estado 0, ela não convergirá para a configuração todos zeros. Já o PSD convergirá para a configuração todos uns.

### 3.3.2 Ergodicidade no PSD

Como já foi descrito na Seção 1.1, sabemos que no processo de Stavskaya há um tipo de transição de fase. Investigaremos se para o PSD também existe uma transição de

fase, isto é, se existe  $\alpha_c \in (0, 1)$  tal que para  $\alpha > \alpha_c$ , então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(u_i^t = 1) = 1, \quad (3.12)$$

para todo  $i \in \mathbb{Z}$  e para  $\alpha < \alpha_c$ , então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(u_i^t = 1) < 1, \quad (3.13)$$

para algum  $i \in \mathbb{Z}$ .

Dizemos que o PSD é *ergódico* quando (3.12) é satisfeito e *não-ergódico* quando (3.13) for satisfeita. De maneira intuitiva, quando o PSD é ergódico, então existe  $\alpha_c$  tal que se  $\alpha > \alpha_c$ , então, para qualquer condição inicial, o processo converge para um sistema onde todas as componentes estão no estado 1; se  $\alpha < \alpha_c$ , então o processo admite outro limite. Equivalente à definição de ergodicidade para o PSD, a qual é descrita por (3.12) e (3.13), podemos apresentar a seguinte definição: O PSD é ergódico se para todo  $\mu \in \mathcal{N}$ ,  $\mu \text{StavD}^t \rightarrow \delta_1$  quando  $t \rightarrow \infty$  e não ergódico se existe  $\mu \in \mathcal{N}$  tal que  $\mu \text{StavD}^t$  não converge para  $\delta_1$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Como há transição de fase no processo de Stavskaya, uma pergunta natural é se o PSD apresenta transição de fase. Neste sentido, queremos investigar se existe algum  $\alpha_c \in (0, 1)$  tal que os cenários de ergodicidade e não ergodicidade são presentes.

### 3.3.2.1 O PSD Como um Processo de Percolação

Agora, faremos uma representação de **StavD** como um problema de percolação (vértice-elo) assim como no processo de Stavskaya [11]. Nosso objetivo será provar que existe  $\alpha_c \in (0, 1)$  tal que se  $\alpha > \alpha_c$ , então (3.12) ocorre para cada  $i \in \mathbb{Z}$ .

Considere o grafo orientado vértice-elo cujos sítios estão orientados em  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$  e denotamos este par como  $(i, t)$ . Chamamos os sítios  $(i, 0)$  de sítios iniciais e cada sítio  $(i, t)$  tem elos orientados nas direções

$$(i, t) + (0, 1) \text{ e } (i, t) + (-1, 1).$$

Vamos chamar de *caminho* uma sequência de "vértice-elo-vértice-elo-..." em que todo elo se conecta com os vértices entre os quais está posto. Dizemos que um caminho é *auto-evitando*, ou sem loops, se todos os vértices em sua sequência são diferentes. Diremos que um caminho é um *bom caminho* se ele inicia na origem e é auto-evitando. Em nosso estudo, consideraremos apenas bons caminhos. Dizemos que um caminho está aberto

quando todos os seus elos estão abertos. Se um caminho é finito, então ele termina em um vértice e o comprimento do caminho é descrito pelo número de elos na sequência.

Dois sítios no grafo,  $(i, t)$  e  $(j, k)$ , são conectados e denotamos  $(i, t) \leftrightarrow (j, k)$ , se há caminho aberto começando em  $(i, t)$  e chegando em  $(j, k)$ . Aqui compreendemos a conectividade como uma relação de equivalência. Dado um sítio  $(i, t)$ , chamaremos de *aglomerado* ou *cluster*, e denotamos por  $C_{(i,t)}$ , o conjunto dos sítios que se conectam com  $(i, t)$ . Seja  $C$  o aglomerado dos sítios que se conectam a origem  $(0, 0)$ .

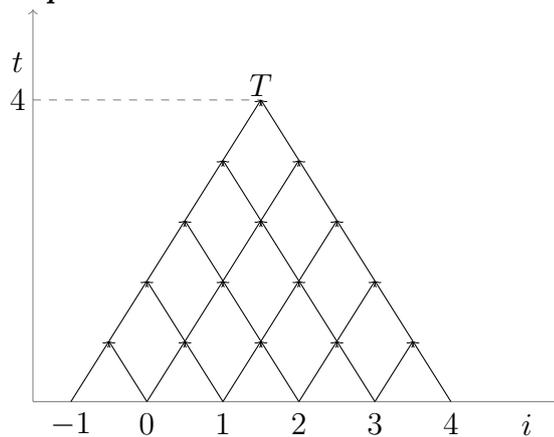
Em nosso modelo, todo elo está aberto na direção de sua orientação e fechado na direção oposta. Todo sítio  $(i, 0)$  está aberto, e consideramos que ele contém uma componente  $u_i^0 > 1$ , e cada sítio  $(i, t)$  com  $t > 0$  está aberto com probabilidade  $1 - \alpha$  e fechado com probabilidade  $\alpha$ , independente dos demais locais. Um vértice  $(i, t)$  tem uma componente  $u_i^t > 1$  se e só se houver um caminho aberto no conjunto

$$\Delta_{(i,t)} = \{(j, s) : 0 \leq s \leq t \text{ e } i \leq j \leq i + t - s\},$$

conectando algum vértice  $(j, 0)$ , com  $i \leq j \leq i + t$  com o vértice  $(i, t)$ .

A Figura 19 ilustra o conjunto  $\Delta_{(-1,4)}$ . Neste exemplo, para que exista uma componente no ponto  $T$  assumindo valor maior que 1, é necessário que exista um caminho aberto da origem até o ponto  $T$ .

**Figura 19 – Ilustração do conjunto  $\Delta_{(-1,4)}$  no modelo de percolação orientada construído para o PSD.**



Fonte: Autoria Própria.

Em um processo de percolação iniciado com todos os sítios iguais a 1, há uma partícula no ponto  $(i, t)$ , se e só se há um caminho aberto de algum sítio inicial  $(j, 0)$  para

o sítio  $(i, t)$  no grafo de percolação [11]. O **Auxiliar 1** é um equivalente a este resultado para o PSD, considerando  $(i, 0) > 1$ , para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

**Auxiliar 1.** *Sejam  $(u_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$  condições iniciais para o PSD. Então  $u_i^t > 1$  no tempo  $t$ , se e só se na percolação orientada, onde cada sítio inicial  $(i, 0)$  com valor  $u_i^0 > 1$ , há um caminho aberto de algum  $(j, 0)$  para  $(i, t)$ .*

Para verificar a validade do **Auxiliar 1**, basta usarmos o resultado visto em [11] considerando um acoplamento do processo de Stavskaya e do PSD, isto é,  $s_i^t = 1$  se e só se  $u_i^t > 1$  e  $s_i^t = 0$  se e só se  $u_i^t = 1$ .

O Lema 3.3.4 exemplifica a representação do PSD por meio de um processo de percolação vértice-elo, orientada.

**Lema 3.3.4.** *Se  $\alpha > \frac{1}{2}$ , então o PSD é ergódico.*

**Prova:** Construiremos um acoplamento entre o processo de percolação que construímos e o PSD. No modelo de percolação orientada, os elos fazem o papel da equação Difus e os sítios fazem o papel da variável aleatória  $X_i^t$ , onde  $\mathbb{P}(X_i^t = 1) = 1 - \alpha$  e  $\mathbb{P}(X_i^t = 0) = \alpha$ . Para todo sítio  $(i, 0) = u_i^0 > 1$ , então no sítio  $(i, t)$  não haverá  $u_i^t > 1$  se não há caminho aberto  $(j, 0)$  para  $(i, t)$ . Para que isso ocorra, deve haver uma sequência

$$(i, k) = (i + 1, k) = \dots = (i + w, k) = 1,$$

com  $k = 1, \dots, t - 1$  e  $w = t - k$ .

Seja  $\gamma_{[(j,0);(i,t)]}$  um caminho partindo do sítio  $(j, 0)$  até o sítio  $(i, t)$ . Então a probabilidade de um caminho aberto que vá do sítio  $(j, 0)$  até o sítio  $(i, t)$  é  $(1 - \alpha)^t$ , o que é válido em nosso modelo, porque consideramos apenas bons caminhos. Em adição, se  $k$  é o número de tais caminhos abertos, então  $k \leq 2^t$ .

Logo, a probabilidade de existir um caminho aberto de algum sítio  $(j, 0)$  até o sítio  $(i, t)$  é dada por

$$\mathbb{P}(\exists \gamma_{[(j,0);(i,t)]} \text{ aberto}) \leq [2(1 - \alpha)]^t \rightarrow 0 \text{ se } \alpha > \frac{1}{2} \text{ e } t \rightarrow \infty.$$

Usando o **Auxiliar 1**, concluímos a prova. ■

**Proposição 3.3.3.** *Se o operador Stav é ergódico, então o operador StavD também é ergódico.*

**Prova:** Primeiro, iremos estabelecer uma correspondência entre as distribuições iniciais de cada processo. Com efeito, dados  $\mu \in \mathcal{M}$  e  $\nu \in \mathcal{I}$

$$\nu(u_i^0 = 1) = \mu(s_i = 0) \text{ e } \nu(u_i^0 > 1) = \mu(s_i = 1). \quad (3.14)$$

Note que  $s_i$  é uma função indicadora de  $u_i^0$ , assumindo valor zero se  $u_i^0 = 1$  e assumindo valor um se  $u_i^0 > 1$ .

Assim, se  $\nu(u_i^t > 1) = 1$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , então a correspondente a  $\mu$  é  $\delta_1$ . Caso  $\nu$  seja tal que  $\nu(u_i^t = 1) = 1$  para algum  $i \in \mathbb{Z}$ , então sua correspondente a  $\mu$  precede  $\delta_1$ . Vejamos a transição de  $t$  para  $t + 1$ . Para  $i \in \mathbb{Z}$  e  $c \in (-1, 0)$  no PSD,

$$(u\text{Difus})_i^{t+1} = 1 \Leftrightarrow u_i^t = u_{i+1}^t = 1 \text{ e } (u\text{Difus})_i^{t+1} > 1 \Leftrightarrow u_i^t > 1 \text{ ou } u_{i+1}^t > 1.$$

De forma análoga, para cada  $i \in \mathbb{Z}$  no processo de Stavskaya, temos

$$(s\text{D})_i^{t+1} = 0 \Leftrightarrow s_i^t = s_{i+1}^t = 0 \text{ e } (s\text{D})_i^{t+1} = 1 \Leftrightarrow s_i^t = 1 \text{ ou } s_{i+1}^t = 1.$$

Relacionando os operadores D e Difus, temos

$$(u\text{Difus})_i^{t+1} = 1 \Leftrightarrow (s\text{D})_i^{t+1} = 0 \text{ e } (u\text{Difus})_i^{t+1} > 1 \Leftrightarrow (s\text{D})_i^{t+1} = 1. \quad (3.15)$$

Agora, iremos estabelecer um acoplamento entre os processos de Stavskaya e o PSD. É suficiente tomarmos  $\nu \in \mathcal{N}$  tal que  $\nu(u_i^0 > 1) = 1$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Utilizamos (3.14) para obter a medida  $\mu$  correspondente.

Considerando  $\alpha \in (0, 1)$  e (3.15), teremos

$$\nu(\text{StavD})(u_i^t > 1) = \mu(\text{Stav})^t(s_i = 1).$$

Logo, quando  $t \rightarrow \infty$

$$\mu(\text{Stav})^t(s_i = 1) \rightarrow \delta_0 \implies \nu(\text{StavD})(u_i^t > 1) \rightarrow \delta_1.$$

■

**Teorema 3.3.4.** *Se  $\alpha > 0.323$ , então o PSD é ergódico.*

**Prova:** Em [3], foi mostrado que o processo de Stavskaya é ergódico para  $\alpha > 0.323$ . Logo, pela Proposição 3.3.3, o PSD é ergódico para este mesmo conjunto de valores do parâmetro  $\alpha$ .

■

### 3.4 ESTUDO NUMÉRICO

Aproximações de Campo médio são ferramentas bastante utilizadas no estudo de procesos estocásticos [10, 18]. Elas oferecem uma representação determinística para a evolução do processo. Algumas questões não triviais podem surgir de seu estudo [45].

Seja  $\mu \in \mathcal{N}$ . Agora, vamos estudar  $\mathbb{E}_\mu(u_i^{t+1})$ .

Pela relação de recorrência no PSD, (3.7), temos que o valor  $u_i^{t+1}$  depende dos valores de  $u_i^t, u_{i+1}^t$  e  $c \in (-1, 0)$ . Considerando  $\mathbb{E}_\mu(u_i^0)$  finita, obtivemos um limite superior para  $\mathbb{E}_\mu(u_i^{t+1})$  com  $c \in (-1, 0)$ . Em particular, se  $c = -1/2$ , nós encontramos o valor exato de  $\mathbb{E}_\mu(u_i^{t+1})$ . Quando  $\mathbb{E}_\mu(u_i^0)$  é uniformemente limitada, temos dois casos: se  $c = -1/2$  e  $\alpha \in (0, 1)$ , então  $\mathbb{E}_\mu(u_i^{t+1}) \rightarrow 1$  com  $t \rightarrow \infty$ . Isto nos dá indícios de que o PSD é sempre ergódico para  $c = 1/2$ ; se  $c \in (-1, 0)$  e  $\alpha \geq 1/2$ , então  $\mathbb{E}_\mu(u_i^{t+1})$  é limitada superiormente pela quantidade  $\frac{\alpha}{1-2(1-\alpha)d}$ , onde  $d = \max\{1+c, -c\}$ .

Os Lemas 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.3 nos dão indícios do comportamento qualitativo do PSD. Além disso, se  $\mathbb{E}_\mu(u_i^0)$  é finita para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , então  $\mathbb{E}_\mu(u_i^{t+1})$  é limitada superiormente.

**Lema 3.4.1.** *Dada distribuição inicial,  $\mu \in \mathcal{N}$ , com  $\mathbb{E}_\mu(u_i^0)$  finita para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , e  $c = -1/2$ , temos*

$$\mathbb{E}_\mu(u_i^{t+1}) = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{t+1} \sum_{k=0}^{t+1} \binom{t+1}{k} \mathbb{E}_\mu(u_k^0) + 1 - (1-\alpha)^{t+1}.$$

**Prova:** Usaremos a representação

$$u_0^{t+1} = X_0^t \left(\frac{u_0^t + u_1^t}{2}\right) + (1 - X_0^t),$$

para (3.7).

É suficiente mostrarmos para  $i = 0$ . A prova será feita por indução em  $t$ .

**Base de indução:** Para  $t = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu(u_0^1) &= \mathbb{E}_\mu \left( \frac{X_0^1}{2} (u_0^0 + u_1^0) \right) + \mathbb{E}_\mu(1 - X_0^1) \\ &= \mathbb{E}_\mu \left( \frac{X_0^1}{2} \right) \mathbb{E}_\mu((u_0^0 + u_1^0)) + \alpha \\ &= \frac{1-\alpha}{2} (\mathbb{E}_\mu(u_0^0) + \mathbb{E}_\mu(u_1^0)) + \alpha. \end{aligned}$$

**Hipótese de indução:**

$$\mathbb{E}_\mu(u_0^t) = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^t \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} \mathbb{E}_\mu(u_k^0) + \alpha \sum_{k=1}^t (1-\alpha)^{k-1}.$$

**Passo de indução:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu(u_0^{t+1}) &= \frac{1-\alpha}{2} (\mathbb{E}_\mu(u_0^t) + \mathbb{E}_\mu(u_1^t)) + \alpha \\
&= \frac{1-\alpha}{2} \left[ \left( \frac{1-\alpha}{2} \right)^t \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} \mathbb{E}_\mu(u_k^0) + \alpha \sum_{k=1}^t (1-\alpha)^{k-1} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1-\alpha}{2} \right)^t \sum_{k=1}^{t+1} \binom{t+1}{k} \mathbb{E}_\mu(u_k^0) + \alpha \sum_{k=1}^t (1-\alpha)^{k-1} \right] + \alpha \\
&= \left( \frac{1-\alpha}{2} \right)^{t+1} \left( \sum_{k=1}^{t+1} \binom{t+1}{k} \mathbb{E}_\mu(u_k^0) + \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} \mathbb{E}_\mu(u_k^0) \right) + \alpha \sum_{k=1}^t (1-\alpha)^k + \alpha \\
&= \left( \frac{1-\alpha}{2} \right)^{t+1} \left\{ \binom{t}{0} \mathbb{E}_\mu(u_0^0) + \sum_{k=1}^t \left[ \binom{t+1}{k} + \binom{t}{k} \right] \mathbb{E}_\mu(u_k^0) \right. \\
&\quad \left. + \binom{t+1}{t+1} \mathbb{E}_\mu(u_{t+1}^0) \right\} + \alpha \sum_{k=1}^{t+1} (1-\alpha)^{k-1} \\
&= \left( \frac{1-\alpha}{2} \right)^{t+1} \sum_{k=0}^{t+1} \binom{t+1}{k} \mathbb{E}_\mu(u_k^0) + 1 - (1-\alpha)^{t+1}.
\end{aligned}$$

■

**Lema 3.4.2.** *Seja  $c \in (-1, 0)$ ,  $d = \max\{1+c, -c\}$  e  $\mu \in \mathcal{N}$ , com  $\mathbb{E}_\mu(u_i^0)$  finita para cada  $i \in \mathbb{Z}$ . Então*

$$\mathbb{E}_\mu(u_i^{t+1}) \leq (d(1-\alpha))^{t+1} \sum_{k=0}^{t+1} \binom{t+1}{k} \mathbb{E}_\mu(u_{k+i}^0) + \alpha \sum_{k=1}^{t+1} [2(1-\alpha)d]^{k-1}.$$

**Prova:** Seja  $d = \max\{1+c, -c\}$  para  $c \in (-1, 0)$ . Logo, teremos

$$u_i^{t+1} \leq [d(u_i^t + u_{i+1}^t)]^{X_i^t} = X_i^t [d(u_i^t + u_{i+1}^t)] + (1 - X_i^t) \quad (3.16)$$

A prova será feita por indução em  $t$ .

**Base de Indução:** Para  $t = 0$  e usando (3.16), temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu(u_i^1) &\leq \mathbb{E}_\mu(X_i^0) d \mathbb{E}_\mu(u_i^0 + u_{i+1}^0) + 1 - \mathbb{E}_\mu(X_i^0) \\
&= d(1-\alpha) [\mathbb{E}_\mu(u_i^0) + \mathbb{E}_\mu(u_{i+1}^0)] + \alpha.
\end{aligned}$$

**Hipótese de indução:**

$$\mathbb{E}_\mu(u_i^t) \leq (d(1-\alpha))^t \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} \mathbb{E}_\mu(u_{k+i}^0) + \alpha \sum_{k=1}^t [2(1-\alpha)d]^{k-1}.$$

**Passo de Indução:** Usando (3.16) em  $u_i^t$  e  $u_{i+1}^t$ , temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu(u_i^{t+1}) &\leq d(1-\alpha)[\mathbb{E}_\mu(u_i^t) + \mathbb{E}_\mu(u_{i+1}^t)] + \alpha \\
&\leq d(1-\alpha) \left\{ (d(1-\alpha))^t \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} \mathbb{E}_\mu(u_{k+i}^0) + \alpha \sum_{k=1}^t [2(1-\alpha)d]^{k-1} \right. \\
&\quad \left. + (d(1-\alpha))^t \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} \mathbb{E}_\mu(u_{k+i+1}^0) + \alpha \sum_{k=1}^t [2(1-\alpha)d]^{k-1} \right\} + \alpha \\
&= (d(1-\alpha))^{t+1} \left[ \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} \mathbb{E}_\mu(u_{k+i}^0) + \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} \mathbb{E}_\mu(u_{k+i+1}^0) \right] \\
&\quad + \alpha \sum_{k=1}^t [2(1-\alpha)d]^k + \alpha \\
&= (d(1-\alpha))^{t+1} \left[ \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} \mathbb{E}_\mu(u_{k+i}^0) + \sum_{k=1}^{t+1} \binom{t}{k} \mathbb{E}_\mu(u_{k+i}^0) \right] \\
&\quad + \alpha \sum_{k=1}^t [2(1-\alpha)d]^k + \alpha \\
&= (d(1-\alpha))^{t+1} \left[ \binom{t}{0} \mathbb{E}_\mu(u_i^0) + \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} \mathbb{E}_\mu(u_{k+i}^0) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^t \binom{t}{k-1} \mathbb{E}_\mu(u_{k+i}^0) \binom{t}{t} \mathbb{E}_\mu(u_{t+1}^0) \right] + \alpha \sum_{k=1}^{t+1} [2(1-\alpha)d]^{k-1} \\
&= (d(1-\alpha))^{t+1} \left[ \binom{t+1}{0} \mathbb{E}_\mu(u_i^0) + \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} \mathbb{E}_\mu(u_{k+i}^0) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^t \binom{t}{k-1} \mathbb{E}_\mu(u_{k+i}^0) \binom{t+1}{t+1} \mathbb{E}_\mu(u_{t+1}^0) \right] + \alpha \sum_{k=1}^{t+1} [2(1-\alpha)d]^{k-1} \\
&= (d(1-\alpha))^{t+1} \sum_{k=0}^{t+1} \binom{t+1}{k} \mathbb{E}_\mu(u_k^0) + \alpha \sum_{k=1}^{t+1} [2(1-\alpha)d]^{k-1}. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

■

**Lema 3.4.3.** *Seja  $\mu \in \mathcal{N}$ , com  $\mathbb{E}_\mu(u_i^0)$  uniformemente limitada para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , isto é, existe valor real positivo  $M$  tal que  $\mathbb{E}_\mu(u_i^0) < M$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$ .*

(a) *Se  $c \in (-1, 0)$ ,  $d = \max\{1+c, -c\}$  e  $\alpha \geq 1/2$ , então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\mu(u_i^t) \leq \frac{\alpha}{1 - [2(1-\alpha)d]}.$$

(b) *Se  $c = -1/2$  e  $\alpha \in (0, 1)$ , então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\mu(u_i^t) = 1.$$

**Prova:** Mostraremos a prova do item (b). Note que, do Lema 3.4.1, se  $\mathbb{E}_\mu(u_i^0)$  for uniformemente limitada para  $i \in \mathbb{Z}$ , então

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu(u_i^{t+1}) &\leq c \left( \frac{1-\alpha}{2} \right)^{t+1} \sum_{k=0}^{t+1} \binom{t+1}{k} M + 1 - (1-\alpha)^{t+1} \\ &= c(1-\alpha)^{t+1} M + 1 - (1-\alpha)^{t+1} \\ &\rightarrow 1 \text{ com } t \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Agora, provaremos o item (a). Pelo Lema 3.4.2, temos

$$\mathbb{E}_\mu(u_i^{t+1}) \leq (d(1-\alpha))^{t+1} \sum_{k=0}^{t+1} \binom{t+1}{k} \mathbb{E}_\mu(u_t^0) + \alpha \sum_{k=1}^{t+1} [2(1-\alpha)d]^{k-1}.$$

Temos para  $\mathbb{E}_\mu(u_k^0) < M$ , e multiplicando o primeiro somatório de (3.17) por  $\frac{2^{t+1}}{2^{t+1}}$ , temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu(u_i^{t+1}) &\leq (d(1-\alpha))^{t+1} \sum_{k=0}^{t+1} \left( \frac{2}{2} \right)^{t+1} \binom{t+1}{k} M + \alpha \sum_{k=1}^{t+1} [2(1-\alpha)d]^{k-1} \\ &\leq M(2d(1-\alpha))^{t+1} + \alpha \left( \frac{1 - [2(1-\alpha)d]^{t+1}}{1 - [2(1-\alpha)d]} \right)\end{aligned}$$

Mas,  $d < 1$ . Assim,

$$2(1-\alpha)d < 2(1-\alpha).$$

Logo, se  $2(1-\alpha) < 1$ , então  $2(1-\alpha)d < 1$ . Mas  $2(1-\alpha) < 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$ .

Sob esta condição,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\mu(u_i^{t+1}) &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} M(2d(1-\alpha))^{t+1} + \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha \left( \frac{1 - [2(1-\alpha)d]^{t+1}}{1 - [2(1-\alpha)d]} \right) \\ &= \frac{\alpha}{1 - [2(1-\alpha)d]}.\end{aligned}$$

■

### 3.5 MODELAGEM COMPUTACIONAL DOS PROCESSOS $\text{Stav}$ E $\text{StavD}$

Faremos um estudo computacional do Processo de Stavskaya,  $\text{Stav}$ , e do PSD,  $\text{StavD}$ . Ao simular estes processos, nós assumimos que ambos têm um número finito de componentes e evoluirão por um tempo finito.

Seja  $\mathbb{Z}_n$  o conjunto dos inteiros módulo  $n$ . Para o procedimento que imita o processo **Stav**, chamamos *periódico* cada  $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_n}$ . Note que se  $s \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_n}$ , então  $s = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}_n}$ . De maneira semelhante, chamamos um periódico para (3.7) o vetor  $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}_n}$ .

Nós vamos descrever um procedimento que imita o processo **Stav**.

---

**Algoritmo 2:** PROCEDIMENTO QUE IMITA O PROCESSO **Stav**

---

**Entrada:** Consideramos um periódico com  $n$  componentes e fazemos

$$s_1^0 = s_2^0 = \dots = s_n^0 = 1$$

**Saída:** Estado das componentes  $s_1^T, s_2^T, \dots, s_n^T$

```

1 início
2   fixe  $\alpha$  no intervalo  $[0, 1]$ 
3   para  $s_i^{t+1}$ , com  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  faça
4     para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  faça
5        $(sD)_i^t = \max\{s_i^t, s_{i+1}^t\}$ 
6       se  $\max\{s_i^t, s_{i+1}^t\} = 0$  então
7          $s_i^{t+1} = 0$ 
8       fim
9       se  $\max\{s_i^t, s_{i+1}^t\} = 1$  então
10        para variável aleatória  $U$  com distribuição uniforme em  $[0, 1]$  faça
11          se  $U \leq \alpha$  então
12             $s_i^{t+1} = 0$ 
13          fim
14          se  $U > \alpha$  então
15             $s_i^{t+1} = 1$ 
16          fim
17        fim
18      fim
19    fim
20  fim
21  faça  $t = t+1$ 
22  repita o passo 3 até  $T = t$ 
23 fim
24 retorna  $s_1^T, s_2^T, \dots, s_n^T$ 

```

---

Agora iremos descrever um procedimento que imita o processo **StavD**.

---

**Algoritmo 3: PROCEDIMENTO QUE IMITA O PROCESSO StavD**


---

**Entrada:** Consideramos um periódico com  $n$  componentes e fazemos

$$u_1^0 > 1, u_2^0 > 1, \dots, u_n^0 > 1 \text{ e } \epsilon > 0$$

**Saída:** Estado das componentes  $u_1^T, u_2^T, \dots, u_n^T$

```

1 início
2   fixe  $\alpha$  no intervalo  $[0, 1]$  e  $c = -1/2$ 
3   para  $u_i^{t+1}$ , com  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  faça
4     para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  faça
5        $(u_i^t + u_{i+1}^t)/2$ 
6       se  $u_i^t = u_{i-1}^t = 1$  então
7          $u_i^{t+1} = 1$ 
8       fim
9       se  $(u_i^t + u_{i+1}^t)/2 > 0$  então
10        para variável aleatória  $U$  com distribuição uniforme em  $[0, 1]$  faça
11          se  $U \leq \alpha$  então
12             $u_i^{t+1} = 1$ 
13          fim
14          se  $U > \alpha$  então
15             $u_i^{t+1} > 1$ 
16          fim
17        fim
18      fim
19    fim
20  fim
21  faça  $t = t+1$ 
22  repita o passo 3 até  $T = t$ 
23 fim
24 retorna  $u_1^T, u_2^T, \dots, u_n^T$ 

```

---

Implementamos os procedimentos que imitam os processos Stav e StavD. Ambas as implementações foram feitas utilizando a linguagem de programação  $C_{++}$ . Para a análise dos dados e criação dos gráficos, utilizamos o programa *Gnuplot*.

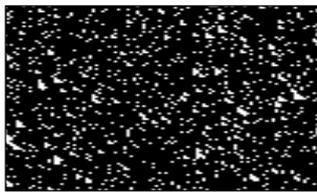
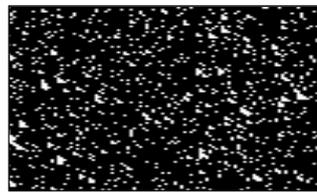
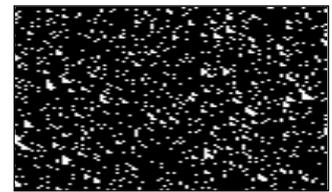
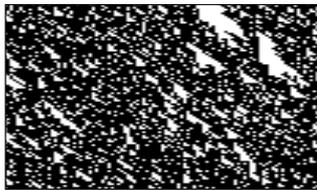
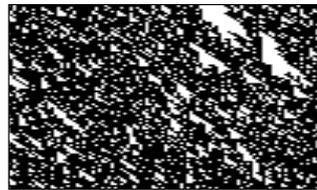
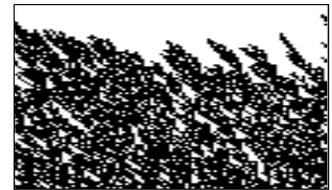
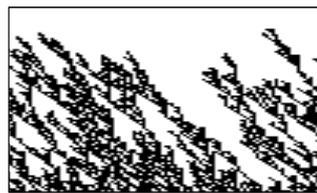
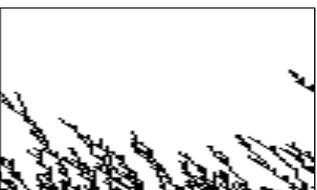
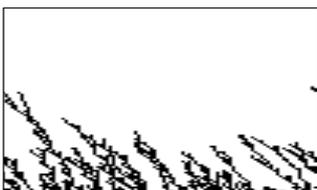
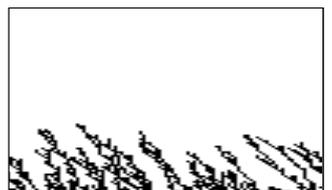
No Teorema 3.3.1 nós obtivemos uma equação de diferença parcial estocástica, isto é, o PSD, o qual se relaciona com o processo de Stavskaya através da ultra discretização.

No Teorema 3.3.4, mostramos que o PSD é ergódico para  $\alpha > 3.323$ . Nosso intuito agora, é investigar o comportamento do PSD para outros valores de  $\alpha$ .

Na Figura 20, nós ilustramos a evolução do processo de Stavskaya e do PSD. No processo de Stavskaya, uma componente no estado 1 é representada na cor preta e uma componente no estado 0 é representada na cor branca. No PSD uma componente  $u_i^t > 1$  é representada na cor preta e uma componente  $u_i^t = 1$  é representada na cor branca. Consideramos um sistema com 100 componentes, isto é,  $\mathbb{Z}_{99}$  e  $T = 100$ . Tomamos  $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$ . No processo de Stavskaya, tomamos  $s_i^0 = 1$ , para todo  $i \in \{0, \dots, 99\}$ . No PSD, consideramos  $\epsilon \in \{1/\ln(10,000); 1/\ln(1,000,000)\}$ , o que implica  $u_i^0 \in \{10,000, 1,000,000\}$  para todo  $i \in \{0, \dots, 99\}$ . As Figuras 20(a), 20(d), 20(g) e 20(j) ilustram o processo de Stavskaya, as Figuras 20(b), 20(e), 20(h) e 20(k) ilustram o PSD com  $\epsilon = 1/\ln(1,000,000)$ , isto é,  $u_i^0 = 1,000,000$  e as Figuras 20(c), 20(f), 20(i) e 20(l) ilustram o PSD com  $\epsilon = 1/\ln(10,000)$ , isto é,  $u_i^0 = 10,000$ . A evolução dos processos se dá no sentido de sul à norte.

Quando consideramos  $\alpha = 0.1$  no processo de Stavskaya e nos dois cenários do PSD, observamos um comportamento qualitativo semelhante, ver Figuras 20(a), 20(b) e 20(c). No processo de Stavskaya, a densidade de uns em  $T = 100$  é positiva, o que pode ser justificado por  $\alpha = 0.1$  ser um valor na região em que o processo de Stavskaya não converge para um sistema com todas as componentes no estado zero. No entanto, não podemos afirmar o mesmo para o PSD, visto que não foi provado o cenário de não ergodicidade neste sistema. Para  $\alpha = 0.2$ , as figuras 20(d) e 20(e) mostram um comportamento qualitativo semelhante entre o Processo de Stavskaya e o PSD com  $\epsilon = 1/\ln(1,000,000)$ . Já para  $\epsilon = 1/\ln(10,000)$ , o PSD erodiu em tempo inferior a  $T = 100$ , ver Figura 20(f). Para  $\alpha = 0.3$ , o processo de Stavskaya nos dá indícios de erosão, mas esta não ocorreu até o tempo  $T = 100$ , já no PSD, nos dois cenários o processo erodiu em tempo inferior a  $T = 100$ . Para  $\alpha = 0.4$ , o processo de Stavskaya e o PSD apresentaram erosão em tempo inferior a  $T = 100$ . Em adição, nos cenários considerados, o PSD erodiu mais rápido quando  $\alpha \in \{0.2, 0.3, 0.4\}$  e  $\epsilon = 1/\ln(10,000)$ , maior valor de  $\epsilon$  considerado na simulação. O comportamento qualitativo do processo de Stavskaya apresenta maior semelhança com o PSD nos casos em que  $\epsilon$  é mais próximo de zero, o que concorda com o Teorema 3.3.1.

**Figura 20 – Ilustrações dos processos Stav e StavD com  $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$ . Consideramos em cada ilustração um sistema com  $n = 100$  e  $T = 100$ . As Figuras (a), (d), (g) e (j) correspondem a ilustrações do processo Stav, onde  $s_i^0 = 1$  para todo  $i \in \{1, \dots, 100\}$ ; as Figuras (b), (e), (h) e (k) correspondem a ilustrações do processo StavD, onde  $\epsilon = 1/\ln(1,000,000)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, 100\}$ ; as Figuras (c), (f), (i) e (l) correspondem a ilustrações do processo StavD, onde  $\epsilon = 1/\ln(10,000)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, 100\}$ . Nas ilustrações, o quadrado preto na coordenada  $\{i, t\}$  indica a componente  $s_i^t = 1$  no processo de stavskaya (respectivamente  $u_i^t > 1$  no StavD) e o quadrado branco indica  $s_i^t = 0$  no processo de Stavskaya (respectivamente  $u_i^t = 1$  no StavD).**

(a)  $s_i^t$  com  $\alpha = 0.1$ (b)  $u_i^t$  com  $\alpha = 0.1$  e  $\epsilon = 1/\ln(1,000,000)$ (c)  $u_i^t$  com  $\alpha = 0.1$  e  $\epsilon = 1/\ln(10,000)$ (d)  $s_i^t$  com  $\alpha = 0.2$ (e)  $u_i^t$  com  $\alpha = 0.2$  e  $\epsilon = 1/\ln(1,000,000)$ (f)  $u_i^t$  com  $\alpha = 0.2$  e  $\epsilon = 1/\ln(10,000)$ (g)  $s_i^t$  com  $\alpha = 0.3$ (h)  $u_i^t$  com  $\alpha = 0.3$  e  $\epsilon = 1/\ln(1,000,000)$ (i)  $u_i^t$  com  $\alpha = 0.3$  e  $\epsilon = 1/\ln(10,000)$ (j)  $s_i^t$  com  $\alpha = 0.4$ (k)  $u_i^t$  com  $\alpha = 0.4$  e  $\epsilon = 1/\ln(1,000,000)$ (l)  $u_i^t$  com  $\alpha = 0.4$  e  $\epsilon = 1/\ln(10,000)$

## 4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, nós estudamos o processo de Stavskaya com comprimento variável e o processo de Stavskaya de difusão.

No que se refere ao processo de Stavskaya com comprimento variável, mostramos que o processo sempre converge para a mesma delta medida, ou seja, o processo é ergódico, o que difere do processo de Stavskaya clássico, uma vez que ele apresenta transição de fase, ergodicidade versus não ergodicidade. Em [18], os autores adotaram apenas medidas uniformes como medidas iniciais. Aqui, nós extendemos o resultado, confirmando sua validade para qualquer medida inicial. Mostramos que a transição de fase presente no processo de Stavskaya clássico é diferente da transição de fase presente no modelo com comprimento variável. Para isso, definimos novas quantidades que nos permitiram estabelecer uma transição de fase baseada na velocidade de convergência do processo. Também realizamos estudos numéricos. Algumas perspectivas de trabalhos futuros surgem a partir do nosso estudo sobre o processo de Stavskaya com comprimento variável, a saber:

- Conjecturamos a existência de  $(\alpha, \beta) \in [0, 1) \times (0, 1)$  para o qual a velocidade apresenta densidade de uns maior que  $c$  pela primeira vez é logarítmica, o que nos abre a possibilidade de trabalhos futuros neste modelo;
- Procurar uma aplicação a um cenário real, o que motivaria a busca de estimadores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e de testes de hipóteses.
- Continuar buscando, por meio de estudo de modelos particulares, o entendimento de processos com comprimento variável.

Propomos um processo de Stavskaya de difusão, PSD. Mostramos que este processo possui uma relação com o processo de Stavskaya. Vimos que o operador determinístico do PSD apresenta as propriedades da monotonicidade, linearidade e erosão, enquanto no operador determinístico do processo de Stavskaya apenas as duas primeiras são válidas. Mostramos que o processo de Stavskaya é obtido por meio da ultra discretização do PSD. Verificamos que o PSD é eroder para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Para  $\alpha > 0.323$ , mostramos que o PSD é ergódico. Essa pesquisa traz vários questionamentos como perspectivas de trabalhos futuros no PSD, a saber:

- Verificar se o PSD é ergódico para todo  $\alpha \in [0, 1]$ ;
- Estabelecer uma definição geral para a classe de operadores quando o conjunto de estados de cada componente é não enumerável;

- Caso não ergodicidade, mostrar a existência de uma medida invariante diferente da trivial;
- Estudar o tipo de medida invariante quando o parâmetro  $\alpha$  é pequeno (Gibbs, quasi Gibbs);
- Estender o conceito de  $\mu$ -ilhas e verificar se após essa mudança o PSD continua gozando da propriedade de eroder;
- Descrever a equação diferencial parcial estocástica que é levada via discretização ao PSD.

## REFERÊNCIAS

- 1 LIGGETT, T. M. **Interacting particle systems**. New York: Springer, 1985.
- 2 MAES, C. New trends in interacting particle systems. In: **Markov Proc. Rel. Fields**, p. 283-288, 2005.
- 3 RAMOS, A.; SOUSA, C.; RODRIGUEZ, P.; CADAVID, P. An improved lower bound for the critical parameter of Stavskaya's process. **Bulletin of the Australian Mathematical Society**, v. 102, n. 3, 517-524, doi:10.1017/S0004972720000404, 2020.
- 4 TOOM, A. L. A family of uniform nets of formal neurons. **Soviet Mathematics - Doklady**, v. 9, n. 6, p. 1338-1341, 1968.
- 5 HARRIS, T. E. Contact interactions on a lattice. **The Annals of Probability**, v. 2, n. 6, p. 969-988, 1974.
- 6 DEPOORTER, J.; MAES, C. Stavskaya's measure is weakly Gibbsian. **Markov Process. Relat. Fields**, v. 12, n. 4, p. 791-804, 2006.
- 7 DE MAERE, A.; PONSELET, L. Exponential decay of correlations for strongly coupled Toom probabilistic cellular automata. **Journal of Statistical Physics**, v. 147, n. 3, p. 634-652, 2012.
- 8 PONSELET, Lise. Phase transitions in probabilistic cellular automata. **arXiv preprint arXiv:1312.3612**, 2013.
- 9 TOOM, Andrei L. Stable and attractive trajectories in multicomponent systems. **Multicomponent random systems**, v. 6, p. 549-575, 1980.
- 10 RAMOS, A. D.; LEITE, A. Convergence Time and Phase Transition in a Non-monotonic Family of Probabilistic Cellular Automata. **Journal of Statistical Physics**, v. 168, n. 3, p. 573-594, 2017.
- 11 TOOM, A. **Contornos, conjuntos convexos e autômatos celulares**. Rio de Janeiro: (In Portuguese) 23<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2001.
- 12 TOOM, A.; VASILYEV N.; STAVSKAYA, O.; MITYUSHIN, L.; KURDYUMOV, G.; PIROGOV, S. **Stochastic Cellular Systems: ergodicity, memory, morphogenesis**.

Ed. by R. Dobrushin, V. Kryukov and A. Toom. *Nonlinear Science: theory and applications*. Manchester University Press, 1990.

13 MENDONÇA, J. R. G. Monte Carlo investigation of the critical behavior of Stavskaya's probabilistic cellular automaton. **Physical Review E**, v. 83, n. 1, p. 012102, 2011.

14 VASERSTEIN, L.; LEONTOVICH, A. Invariant measures of certain Markov operators describing a homogeneous random medium. **Probl. Inf. Transm.**, v. 6, n. 1, p. 61-69, 1970.

15 DEPOORTER, J.; MAES, C.. Stavskaya's measure is weakly Gibbsian. **Markov Process. Relat. Fields**, v. 12, n. 4, p. 791-804, 2006.

16 TOOM, A. Non-ergodicity in a 1-D particle process with variable length. **Journal of Statistical Physics**, v. 115, n. 3, p. 895-924, 2004.

17 TOOM, A.; RAMOS, A. D.; ROCHA, A. V.; SIMAS, A. B. **Processos aleatórios com comprimento variável**. 28<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática. 2011.

18 RAMOS, A. D.; SILVA, F. S. G.; SOUSA, C. S.; TOOM, A. Variable-length analog of Stavskaya process: A new example of misleading simulation. **Journal of Mathematical Physics**, v. 58, n. 5, p. 053304, 2017.

19 ROCHA, A. V.; SIMAS, A. B.; TOOM, A. Substitution operators. **Journal of Statistical Physics**, v. 143, n. 3, p. 585-618, 2011.

20 COSTA, L. T.; RAMOS, A. D. Dynamic aspects of the flip-annihilation process. **Journal of Mathematical Physics**, v. 61, n. 5, p. 053301, 2020.

21 MAES, C. Challenges and trends in interacting particle systems. **Complex Systems**, v. 18, p. 21, 2006.

22 WILLIAMS, D. **Probability with martingales**. Cambridge university press, 1991.

23 MAIRESSE, J.; MARCOVICI, I. Around probabilistic cellular automata. **Theoretical Computer Science**, v. 559, p. 42-72, 2014.

24 MALYSHEV, V. A. Quantum grammars. *Journal of Mathematical Physics*, v. 41, n. 7, p. 4508-4520, 2000.

- 25 MALYSHEV, V. A. Random grammars. **Russian Mathematical Surveys**, v. 53, n. 2, p. 345, 1998.
- 26 CHARNIAK, E. **Statistical language learning**. London: MIT press, 1996.
- 27 ATHREYA, K. B.; VIDYASHANKAR, A. N. **Branching processes**. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- 28 DURRETT, Rick. Probability: **Theory and Examples**. 4th edition, Cambridge University Press. 2010.
- 29 FERRARI, Pablo A.; GALVES, Antonio. **Construction of stochastic processes, coupling and regeneration**. XIII Escuela Venezolana de Matemática, 2000.
- 30 NORRIS, J. R. **Markov Chains**. Cambridge: university press, v. 2, 1997.
- 31 MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística básica**. 9<sup>a</sup> ed. São Paulo: Saraiva Educação SA, 2017.
- 32 EVANS, Lawrence C. **Partial differential equations**. American Mathematical Soc., 2010.
- 33 STRAUSS, Walter A. **Partial differential equations: An introduction**. John Wiley and Sons, 2007.
- 34 KONNO, Norio; KUNIMATSU, Toshihiko; MA, Xia. From stochastic partial difference equations to stochastic cellular automata through the ultra-discretization. **Applied mathematics and computation**, v. 155, n. 3, p. 727-735, 2004.
- 35 HATAYAMA, Goro; KUNIBA, Atsuo; TAKAGI, Taichiro. Soliton cellular automata associated with crystal bases. **Nuclear Physics B**, v. 577, n. 3, p. 619-645, 2000.
- 36 TOKIHIRO, T.; NAGAI, A.; SATSUMA, J. Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization. **inverse Problems**, v. 15, n. 6, p. 1639, 1999.
- 37 FUKUDA, Kaori; YAMADA, Yasuhiko; OKADO, Masato. Energy functions in box ball systems. **International Journal of Modern Physics A**, v. 15, n. 09, p. 1379-1392, 2000.

- 38 ZHANG, Zhongqiang; KARNIADAKIS, George. **Numerical methods for stochastic partial differential equations with white noise**. Springer International Publishing, 2017.
- 39 TOKIHIRO, T.; TAKAHASHI, D.; MATSUKIDAIRA, J.; SATSUMA, J. From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 18, p. 3247, 1996.
- 40 MATSUYA, K.; MURATA, M. Spatial pattern of discrete and ultradiscrete Gray-Scott model. **Discrete & Continuous Dynamical Systems-B**, v. 20, n. 1, p. 173, 2015.
- 41 EMMERICH, H.; KAHNG, B. A random cellular automaton related to the noisy Burgers equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 259, n. 1-2, p. 81-89, 1998.
- 42 TAKAHASHI, D.; SATSUMA, J. A soliton cellular automaton. **Journal of the Physical Society of Japan**, v. 59, n. 10, p. 3514-3519, 1990.
- 43 INOUE, R.; KUNIBA, A.; TAKAGI, T. Integrable structure of box-ball systems: crystal, Bethe ansatz, ultradiscretization and tropical geometry. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 45, n. 7, p. 073001, 2012.
- 44 RAMOS, A. D.; LEITE, A. Convergence Time and Phase Transition in a Non-monotonic Family of Probabilistic Cellular Automata. **Journal of Statistical Physics**, v. 168, n. 3, p. 573-594, 2017.
- 45 BALISTER, P.; BOLLOBAS, B. and KOZMA, R. Large deviations for  $\ell^1$  mean field models of probabilistic cellular automata. *Issue*, v. 39, pp.399-415, 2006.
- 46 PALEY, R. E. A. C.; ZYGMUND, Antoni. A note on analytic functions in the unit circle. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Cambridge University Press, 1932. p. 266-272.
- 47 LIN, Z.; BAI, Z. **Probability inequalities**. Springer Science & Business Media, 2011.
- 48 JAMES, B. R. **Probabilidade: um curso em nível intermediário**. 4<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- 49 SERICOLA, B. **Markov chains: theory and applications**. John Wiley and Sons, 2013.

50 ANDERSON, D. F. **Introduction to Stochastic Processes with Applications in the Biosciences**. University of Wisconsin at Madison, 2013. Available at: <http://www.math.wisc.edu/~anderson/605F13/Notes/StochBio.pdf>

## APÊNDICE A - SOBRE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Uma classe  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de um conjunto não vazio  $\Omega$  é chamada  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  se satisfaz:

- (a)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
- (b) Se  $A \in \mathcal{F}$ , então  $A^c \in \mathcal{F}$ ;
- (c) Se  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , então  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

Além disso, para uma classe  $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$ , definimos a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{C}$  como a interseção de todas as  $\sigma$ -álgebras que contém  $\mathcal{C}$ .

Relembramos a desigualdade de Paley-Zygmund, mais conhecida como **método do segundo momento** [46].

**Auxiliar 2** (Método do Segundo Momento). *Se  $X$  é uma variável aleatória não negativa com variância finita e se  $0 \leq \theta \leq 1$ , então*

$$\mathbb{P}(X > \theta \mathbb{E}(X)) \geq (1 - \theta)^2 \frac{(\mathbb{E}(X))^2}{\mathbb{E}(X^2)}$$

Uma prova para **Auxiliar 3** pode ser encontrada em [47, 48].

**Auxiliar 3.** *Se uma variável aleatória  $X \geq 0$ , tem esperança, isto é,  $\mathbb{E}(X) < \infty$ , então*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) \leq \mathbb{E}(X) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

Seja uma cadeia de Markov,  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ , em um espaço de estados  $S$ . Dizemos que  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  é *homogênea no tempo*, ver [49], se para todos  $t, k \in \mathbb{N}$  e para todos  $i, j \in S$ , nós temos

$$\mathbb{P}(X_{t+k} = j | X_k = i) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i).$$

Nós dizemos que  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  é *homogênea no espaço*, se

$$\mathbb{P}(X_t = j | X_{t-1} = i) = \mathbb{P}(X_t = j + k | X_{t-1} = i + k),$$

onde  $i + k, j + k \in S$ .

Seja um processo de Nascimento e Morte  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$  com as seguintes probabilidades de transição

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t = i) = \begin{cases} p_i, & \text{se } j = i + 1; \\ q_i, & \text{se } j = i - 1; \\ 1 - p_i - q_i, & \text{se } j = i; \\ 0, & \text{nos outros casos,} \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $p_i > 0$ , para todo  $i \geq 0$  e  $q_i > 0$  para todo  $i \geq 1$  (nós adotamos  $q_0 = 0$ ), isto é, um processo de nascimento e morte irredutível.

Em **Auxiliar 4** **Auxiliar 5** apresentamos resultados sobre a transiência e recorrência de um processo de nascimento e morte irredutível e 6 nós apresentamos um resultados sobre o tempo médio que o processo atinja o estado 0 pela primeira vez, dado que ele foi iniciado no estado  $i$ . Esses resultados podem ser vistos em [50], p.72, p.73 e p. 77 respectivamente.

**Auxiliar 4.** *Um processo de Nascimento e Morte como definido em (4.1) é transiente se, e somente se*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1 q_2 \cdots q_k}{p_1 p_2 \cdots p_k} < \infty.$$

**Auxiliar 5.** *Um processo de Nascimento e Morte como definido em (4.1) é recorrente positivo se, e somente se*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{k-1}}{q_1 q_2 \cdots q_k} < \infty.$$

**Auxiliar 6.** *Sejam  $(Y_t^*)_{t \in \mathbb{Z}_+}$  um processo de nascimento e morte como definido em (4.1) e  $k_i$  o tempo esperado até que o processo atinja o estado 0, dado que ele foi iniciado no estado  $i$ . Então*

$$k_m = \begin{cases} \frac{1}{q_i} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{m-1}}{q_1 q_2 \cdots q_m}, & \text{se } i = 1; \\ k_1 + \sum_{n=1}^{m-1} \left[ \frac{q_1 q_2 \cdots q_n}{p_1 p_2 \cdots p_n} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{j-1}}{q_1 q_2 \cdots q_j} \right], & \text{se } i > 1. \end{cases}$$

Seja um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$  e  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ , definimos a esperança condicional de  $X$  dado  $\mathcal{F}$ ,  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ , como sendo qualquer variável aleatória  $Y$  satisfazendo

- (i)  $Y \in \mathcal{F}$ , ou seja, é mensurável;
- (ii) Para todo  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}$ .

Se (i) e (ii) são satisfeitas, então as informações sobre qualquer  $A \in \mathcal{F}$  são descritas por  $\mathcal{F}$ .

**Auxiliar 7.** *Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  um espaço mensurável. Então*

(a) *Se  $X \in \mathcal{F}$ , então  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$ ;*

(b) *Se  $X$  é independente de  $\mathcal{F}$ , então  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$ .*

**Prova:** Mostraremos primeiro (a). Segue da definição de esperança condicional de  $X$  dado  $\mathcal{F}$  que  $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$  é  $\mathcal{F}$ -mensurável e para cada  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}.$$

Como  $X \in \mathcal{F}$ , temos  $X = Y$  quase certamente, para cada  $A \in \mathcal{F}$ , isto é,  $X = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ .

Agora, mostraremos (b). Note que  $\mathbb{E}(X) \in \mathcal{F}$ . De fato, sendo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  um espaço mensurável, defina  $\mathbb{E}(X) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ . Como  $X$  é uma variável aleatória, então  $\mathbb{E}(X) = c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ . Assim,  $f^{-1}(c) = \Omega \in \mathcal{F}$ . Agora, tomamos  $A \subset \mathcal{F}$ . Logo,

$$\mathbb{I}_A \in \mathcal{F}.$$

Além disso,  $X$  e  $\mathbb{I}_A$  são independentes. Daí,

$$\int_A X d\mathbb{P} = \mathbb{E}(X\mathbb{I}_A) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = \left( \int_A d\mathbb{P} \right) \mathbb{E}(X) = \int_A \mathbb{E}(X) d\mathbb{P}.$$

■

As provas de **Auxiliar 8, 9 e 10** podem ser encontradas em [28].

**Auxiliar 8.** *Se  $X \in \mathcal{F}$  e  $\mathbb{E}|Y|, \mathbb{E}|XY| < \infty$ , então  $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ .*

**Auxiliar 9.** *Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias e  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  uma sequência de variáveis aleatórias. Então*

(a) *Esperança condicional Linear:*

$$\mathbb{E}(aX + Y|\mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}). \quad (4.2)$$

(b) *Se  $X \leq Y$ , então*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}). \quad (4.3)$$

(c) *Se  $X_n \geq 0$  e  $X_n \uparrow X$  com  $\mathbb{E}(X) < \infty$ , então*

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \uparrow \mathbb{E}(X|\mathcal{F}). \quad (4.4)$$

Seja um espaço filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$ . Então,  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  é um espaço de probabilidade usual,  $\{\mathcal{F}_n; n \geq 0\}$  é uma filtração, isto é, uma família crescente de sub $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}.$$

Definimos

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n) \subseteq \mathcal{F}.$$

Intuitivamente, as informações sobre  $w \in \Omega$  disponíveis no tempo  $n$  consiste precisamente nos valores de  $Z(w)$ , para todas  $\mathcal{F}_n$ , funções mensuráveis de  $Z$ . Usualmente,  $\{\mathcal{F}_n\}$  é a filtração natural

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$$

de algum processo estocástico  $X = (X_n : n \in \mathbb{Z}^+)$  e então a informação sobre  $w$  que temos no tempo  $n$  consiste dos valores

$$X_0(w), X_1(w), \dots, X_n(w).$$

Um processo  $X = (X_n; n \geq 0)$  é chamado adaptado (para filtração  $\{\mathcal{F}_n\}$ ), se para cada  $n$ ,  $X_n$  é  $\mathcal{F}_n$ -mensurável.

**Definição:** Um processo  $X$  é chamado martingale (relativo para  $(\{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$ ) se

- (i)  $X$  é adaptado;
- (ii)  $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \forall n$ ;
- (iii)  $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ , quase certamente, com  $n \geq 1$ .

Um supermartingale (relativo para  $(\{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$ ) é definido similarmente, exceto (iii) que é substituído por

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1},$$

quase certamente, com  $n \geq 1$ , e um submartingale é definido com (iii) substituído por

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1},$$

quase certamente, com  $n \geq 1$ .

Seja  $X$  uma variável aleatória, definimos  $X^+$  por

$$X^+ = \begin{cases} X, & \text{se } X > 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Auxiliar 10** (Teorema da Convergência de Martingale). *Se  $X_n$  é um submartingale com  $\sup \mathbb{E}(X_n^+) < \infty$ , então com  $n \rightarrow \infty$ ,  $X_n$  converge quase certamente para um limite  $X$  com  $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ .*

Seja  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$  uma cadeia de Markov com conjunto de estados  $I$ . Denotamos a probabilidade de ir do estado  $i$  para o estado  $j$  por  $p_{ij}$ . O tempo de alcance ao subconjunto  $A \subset I$  (ver [30]) é dado por

$$h^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}.$$

O tempo médio de alcance a  $A$ , dado que o processo iniciou no estado  $i$  é dado por

$$k_i^A = \mathbb{E}_i(H^A).$$

As provas para o **Auxiliar 11**, **Auxiliar 12** e **Auxiliar 13** encontram-se em [30], nas páginas p.13, p. 17 e p. 26 respectivamente.

**Auxiliar 11.** *O vetor de probabilidade de alcance  $h^A = (h_i^A : i \in I)$  é a solução minimal não negativa do sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} h_i^A = 1, & \text{se } i \in A; \\ h_i^A = \sum_{j \notin A} p_{ij} h_j^A. \end{cases}$$

**Auxiliar 12.** *O vetor de tempo médio de alcance  $k^A = (k_i^A : i \in I)$  é a solução minimal não negativa do sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} k_i^A = 0, & \text{se } i \in A; \\ k_i^A = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A. \end{cases}$$

**Auxiliar 13.** *Seja  $(X_t)_{t \geq 1}$  uma cadeia de Markov com um conjunto contável de estados e  $T_i$  como definido em (2.43). A seguinte dicotomia se mantém:*

- (a) *Se  $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$ , então  $i$  é um estado recorrente;*
- (b) *Se  $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$ , então  $i$  é um estado transiente.*

**APÊNDICE B - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA LINEAR DE 1ª  
ORDEM UNIDIMENSIONAL**

Sejam  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável e  $c$  uma constante real. Apresentaremos uma solução para a equação de transporte simples

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0.$$

Sejam  $\xi = x - ct$  e  $u(x, t) = V(\xi, t)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Substituindo  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c$  e  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$  temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial t} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \xi}.$$

Daí,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t} \implies \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Desde que nossa solução é constante ao longo da direção  $(1, c)$ , nós temos

$$u(x, t) = u(x_0 + ct, t) = u(x_0, 0)$$

$$u(x_0, 0) = f(x_0)$$

$$u(x, t) = f(x_0) = f(x - ct).$$

**Coordenadas comuns**  $(x, t)$ :  $u(x, t)$  e  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0$ .

**Coordenadas de movimento**  $(\xi, t)$ :  $V(\xi, t)$ ,  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$  e  $\xi = x - ct$ .

Resolvemos  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$  e usamos para achar  $u(x, t)$ .

Como  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , então  $V$  é independente de  $t$ . Logo,  $V = f(\xi)$ .

Sendo  $V(\xi, t) = u(x, t)$  temos

$$u(x, t) = f(\xi) = f(x - ct).$$

Logo,  $f(x - ct)$  é solução de  $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , onde  $u_0(x) = f(x)$ .

## APÊNDICE C - MONOTONICIDADE EM AUTÔMATOS CELULARES PROBABILÍSTICOS

Sejam  $\Omega$  o espaço de configurações de um autômato celular probabilístico,  $\mathcal{M}$  o conjunto das medidas normalizadas na  $\sigma$ -álgebra gerada pelos cilindros em  $\Omega$  e  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  um operador aleatório. A seguir, descreveremos condições para as quais o operador  $P$  apresenta a propriedade da monotonicidade.

Para definirmos o conceito de monotonicidade de operadores, precisamos inicialmente estabelecer um conceito de ordem parcial em nosso espaço de configurações  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  como em [3, 11]. Vamos considerar  $0 < 1$ . Estabelecemos uma ordem parcial em  $\Omega$  e dizemos que a configuração  $x$  *precede* a configuração  $y$ , e denotamos  $x \prec y$  se  $x_i \leq y_i$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

Dizemos que um conjunto mensurável  $\text{Sup} \subset \Omega$  é *superior* se

$$\forall x, y \in \Omega, (x \in \text{Sup} \text{ e } x \prec y) \implies y \in \text{Sup}.$$

Agora, introduzimos uma ordenação em  $\mathcal{M}$ . Dizemos que a medida  $\nu$  *precede* a medida  $\pi$  se  $\nu(\text{Sup}) \leq \pi(\text{Sup})$  para qualquer conjunto superior  $\text{Sup}$ .

Nós dizemos que um operador  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é monótono se  $\nu \prec \pi \implies \nu P \prec \pi P$  [3, 11].