



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

LUDMILA DE PINHO CAVALCANTI

Um Modelo Biológico com Operador de Substituição.

Recife

2023

LUDMILA DE PINHO CAVALCANTI

Um Modelo Biológico com Operador de Substituição.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito final para a obtenção do título de Mestre em 28 de abril de 2023.

Área de Concentração: Probabilidade.

Orientador (a): Prof. Dr. Alex Dias Ramos

Coorientador (a): Profa. Dra. Caliteia Santana de Sousa

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

C377m Cavalcanti, Ludmila de Pinho
Um modelo biológico com operador de substituição / Ludmila de Pinho Cavalcanti. – 2023.
57 f.: il., fig.

Orientador: Alex Dias Ramos.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2023.
Inclui referências e apêndices.

1. Probabilidade. 2. Transição de fase. I. Ramos, Alex Dias (orientador).
II. Título.

519.2 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2023-93

LUDMILA DE PINHO CAVALCANTI
UM MODELO BIOLÓGICO COM OPERADOR DE SUBSTITUIÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Estatística.

Aprovada em: 28 do mês de abril de 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alex Dias Ramos
Orientador, UFPE

Prof^a Dr^a Calitéia Santana de Sousa
Coorientadora, UFPE

Prof. Dr. Getúlio José Amorim do Amaral
Examinador Interno, UFPE

Prof. Dr. Anatoli Iambartsev
Examinador Externo, USP

Dedico esta dissertação a minha irmã, Larissa de Pinho Cavalcanti, e a todas as mulheres que possuem jornadas múltiplas, sendo uma delas como cientistas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à Deus por nunca ter deixado faltar absolutamente nada, por escrever certo através de linhas tortas e por ter me dado forças, quando achei que ia ruir. Agradeço à minha família, principalmente aos meus irmãos Larissa e Dimitri de Pinho Cavalcanti, por todo amor, carinho, paciência, apoio e compreensão com as diversas alterações de humores, os estresses diários e as infinitas perguntas sobre como fazer as coisas de um jeito mais apropriado.

Agradeço profundamente aos meus orientadores Alex Dias e Caliteia Sousa por todo o apoio, paciência, calma e por acreditarem em mim, quando muitas vezes eu não acreditei. Por terem sido meus professores na graduação de estatística e por serem uma fonte de inspiração.

Agradeço aos meus melhores amigos Claytiane Mousinho, Aline Manuella, Filipe Nascimento, Marlon Hesly, Matheus Donato, Paulo Victor e Victor Farias por todo apoio, escuta, paciência e carinho durante esses últimos anos, principalmente por compreenderem que não pude estar presente em suas vidas como gostaria. Agradeço aos meus colegas de mestrado Clarice, Débora, João, Jonatha, Maria Franciele, Maria Júlia, Pedro, por todas as horas de estudo, pelas trocas e pela oportunidade de tê-los conhecidos. E em especial agradeço à João Gondim, por toda parceria e paciência. E ao meu namorado Jonatha Pimentel, por toda paciência com meus surtos de ineficiência e nas horas das discussões sobre os temas das nossas dissertações, por todo o amor e compreensão. Agradeço à Eder Quesado pela ajuda com os artigos e a cada pessoa que indiretamente participou desse momento. E agradeço as pedras do meu caminho, pela possibilidade de crescimento e amadurecimento durante esta dissertação.

Por último, e não menos importante, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro e pela chance de fazer ciência.

Muito obrigada.

RESUMO

Muitos organismos biológicos são constituídos por bilhões de células, e durante seu desenvolvimento algumas delas podem apresentar a reprodução celular, isto é, o processo de divisão celular, conhecido como mitose, tornando-se duas células semelhantes. Outras células sofrem morte celular. Neste trabalho, propomos e analisamos um modelo matemático, em tempo discreto, para descrever a reprodução e morte celular. Assumimos que essas células estão localizadas em \mathbb{Z} e as células que sofreram a morte celular permanecem no sistema. O conceito utilizado para essa modelagem não é recente, contudo sua apresentação formal é. Em nosso modelo, a célula que sofreu morte celular é representada por 1 (um) e a célula ativa por 0 (zero). Cada célula ativa pode sofrer morte celular com probabilidade p ou sofrer reprodução celular com probabilidade $1 - p$. Isto ocorre de forma independente para cada célula. Para o nosso modelo, fomos capazes de trazer uma formalização matemática, a qual exhibe a existência de uma transição de fase entre os comportamentos de ergodicidade versus não ergodicidade. Contudo, outras características ainda merecem atenção.

Palavras-chaves: modelagem matemática de processo biológico; operadores de substituição; transição de fase.

ABSTRACT

Biological organisms are constituted by billions of cells. During their development, cells can engage in cellular reproduction through cell division, also known as mitosis, generating two identical cells. In other cases, however, cells can die. In the present work, we propose and analyze a mathematical model, in discrete time, to describe cell reproduction and death. It is assumed that cells that engage in mitoses are located in \mathbb{Z} whereas cells that die remain in the system. In this model, cells that suffer cell death are represented by 1 (one) and active cells by 0 (zero). Each active cell can either suffer cell death with probability p or engage in cell reproduction with probability $1 - p$. This path is taken by each cell independently. Until the present, it was possible to formulate an adequate mathematical formalization for the present model, and to show the existence of a phase transition between ergodicity behaviors in opposition to non-ergodicity behaviors. Nonetheless, other characteristics demand further investigation.

Keywords: mathematical modeling of biological processes; operators of substitution; transition phase.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – A evolução da palavra $W = 01$, de acordo com a variação do tempo t . . .	19
Figura 2 – Uma possível evolução da palavra $W = 0$, de acordo com a variação do tempo t , e a correspondente evolução do processo de ramificação.	29
Figura 3 – Diagrama de transição do processo R_t . Neste processo, independente do valor de n , todos os estados pares são visitados. Podemos notar um comportamento padrão para os valores que n assume, isto é, quando n assume valores pares, temos que o estado n é visitado, já quando n assume valores ímpares o estado n não é visitado.	30
Figura 4 – Função de probabilidade da variável aleatória T para $p \in \{0.51, \dots, 0.99\}$. Para cada valor de p , tomamos $k \in \{1, \dots, 20\}$	36
Figura 5 – Gráfico para a Esperança da variável aleatória T quando $p \in \{0.51, 0.52, \dots, 1\}$. Para cada valor de p tomamos $k \in \{20, 200, 2000\}$	38
Figura 6 – Uma possível evolução da palavra $W = 0$ e a correspondente evolução do processo de Ramificação.	41
Figura 7 – Evolução da palavra W com probabilidade $p = 0.1$, considerando 2000 partículas, e considerando a 200 repetições.	48
Figura 8 – Evolução da palavra W com probabilidade $p = 0.5$, considerando 2000 partículas.	49
Figura 9 – Evolução da palavra W com probabilidade $p = 0.9$, visualizando as 5 primeiras letras e considerando $L = 1000$	50

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{A}	Alfabeto.
$\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$	Espaço de configurações.
$a_{\mathbb{Z}}$	Configuração cujo todos os estados são iguais a a .
δ_x	Medida concentrada na configuração x .
\mathcal{M}	Conjunto das medidas de probabilidade em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.
μ	Medida pertencente a \mathcal{M} .
P	Operador definido em Ω .
$ V $	Comprimento de uma palavra V .
dic	Dicionário.
Δ_W	Subconjunto finito formado por palavras derivadas da palavra W .
$q_V(W)$	Quantidade de posições nas quais a palavra W entra na palavra V .
$\mathbb{E}(\cdot)$	Esperança de uma variável aleatória.
$d_X(W)$	Densidade média de quantidades das posições que W entra em X .
Ω	Conjunto das palavras aleatórias.
$\text{Bin}(n, p)$	Distribuição Binomial com os parâmetros n e p .
$\text{Ext}(\mu \mid P)$	Coefficiente de contração/dilatação que P multiplica o comprimento de uma palavra aproximando μ .
$(R_t)_{t \in \mathbb{N}}$	Processo de Ramificação.
$\mathbb{P}_i(R_t)$	Probabilidade condicional do Processo de Ramificação dado que no passo inicial, $t = 0$, tinha-se i ancestrais.
$\mathbb{E}_i(R_t)$	Esperança condicional do Processo de Ramificação dado que no passo inicial, $t = 0$, tinha-se i ancestrais.

T Variável aleatória que indica o tempo de extinção do Processo de Ramificação.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	DEFINIÇÕES E TEOREMAS	15
2.1	PALAVRAS E PALAVRAS ALEATÓRIAS	15
2.2	CONVERGÊNCIA E OPERADORES	17
2.3	NOSSO MODELO E CONSISTÊNCIA	18
2.4	PRINCIPAIS RESULTADOS	20
3	RESULTADOS PRELIMINARES	22
4	PROVA DOS TEOREMAS 1, 2 E 3	26
5	UM ACOPLAMENTO $q_{W_t}(0)$	29
6	PROVA DO TEOREMA 4	39
7	PROVA DO TEOREMA 5	41
8	SIMULAÇÃO	48
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
	REFERÊNCIAS	52
	APÊNDICE A – ALGUNS RESULTADOS SOBRE PROCESSO DE RAMIFICAÇÃO	54
	APÊNDICE B – MAPAS MENTAIS	56

1 INTRODUÇÃO

A teoria da probabilidade teve seu início em meados do século XVI, quando Blaise Pascal e Pierre de Fermat através de correspondências discutiram sobre jogos de azar. Outros pesquisadores contribuíram para o desenvolvimento do campo, como o alemão Christian Huygens, o inglês De Moivre e o suíço Bernoulli durante o século XVII. Entretanto, foi apenas no século XIX que Pierre-Simon Laplace desenvolveu e generalizou a definição de probabilidade para eventos discretos. Também contribuiu o pesquisador Andrey Kolmogorov, que em 1933, criou os famosos axiomas de probabilidade, chegando na teoria da probabilidade que conhecemos hoje (FIGUEREIDO, 2010; FLORESCU, 2014).

No início da década de 1970 começa a ser desenvolvido uma subárea da teoria de probabilidade, o sistema de partículas interagentes, com o objetivo de descrever e analisar modelos estocásticos para evolução temporal de sistemas cujas medidas de equilíbrio são estados clássico de Gibbs (LIGGETT, 1985). A presente dissertação se propõe contribuir para o desenvolvimento de pesquisas na área de probabilidade, a partir da investigação sobre uma nova classe de partículas interagentes. Nosso estudo tem como principal objetivo apresentar uma formalização do caso particular do modelo de (LI, 1989) fazendo uso da teoria de (TOOM et al., 2011) juntamente com Cadeias de Markov, especificamente, processos de Ramificação. Estudaremos o comportamento de uma sequência de dois elementos, a saber 0 (zero) e 1 (um), que se atualiza a cada passo de tempo t da seguinte maneira: o símbolo 0 duplicará com probabilidade $1 - p$, levando assim, a expansão da sequência, ou ele pode modificar, se tornando um símbolo diferente com probabilidade p , conhecida também, como ponto de mutação. Já o símbolo 1, permanecerá inalterado. Como nosso processo ocorre em tempo discreto, e o comprimento da sequência que estamos estudando varia, nós empregamos a teoria criada por (TOOM et al., 2011), de operadores de substituição.

No modelo proposto por (LI, 1989) o intuito foi estudar a relação de sistemas dinâmicos abertos e um determinado ruído. Tal sistema pode ser descrito como uma sequência de zeros e uns que vai se atualizando a cada passo de tempo t , seguindo a regra:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow \\ 0 \rightarrow \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ com probabilidade } p. \\ 11 \text{ com probabilidade } 1 - p. \\ 1 \text{ com probabilidade } q. \\ 00 \text{ com probabilidade } 1 - q. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Ou seja, cada símbolo pode mudar para um símbolo diferente com uma probabilidade p ou q associada, ou pode aumentar o comprimento da sequência, duplicando-se, com uma probabilidade $1-p$ ou $1-q$. Esse tipo de comportamento é conhecido como regra de expansão-modificação. Quando $0 < p, q < 1$ a parte da expansão domina o sistema. Logo, o tamanho da sequência aumentará. E, quando a parte da modificação prevalece, o tamanho não aumenta, apenas existindo a modificação dos elementos. De modo que Li concluiu que para se ter o espectro de um determinado tipo é necessário que o comportamento de expansão e modificação estejam em equilíbrios.

Vários estudos já foram realizados sobre as propriedades desse modelo, como a descrição da função de correlação (vide (TOKMAKOFF, 2008) e (SETHNA, 2021)). Tal função possui algumas características para o processo de mutação que ocorre na evolução do DNA (MANSILLA; COCHO, 2000). Também, foi provado por (SALGADO-GARCÍA; UGALDE, 2013) para esse sistema, a existência e unicidade de uma medida estacionária, e que sua correlação decai seguindo uma certa Lei de potência.

Sabemos que o comportamento de replicação DNA é um mecanismo mais complexo do que podemos tratar devido as consequências de suas variações. Ou seja, durante o processo de sintetização de uma nova fita podem ocorrer alterações no código genético (como inserção, inversão, exclusão, ...) que podem desencadear morte celular, resistência a antibióticos (BROWN, 2002), problemas de saúde (PRAY, 2008).

Um modo proposto para estudarmos essas alterações é através do sistema conhecido por expansão-modificação. Este é apresentado em (1.1), como uma aproximação do processo de atualização da sequência de DNA, em que pequenos segmentos de DNA são copiados e inseridos de modo consequente ao segmento original (LI; MARR; KANEKO, 1994; LI, 1991). Assim, consideraremos uma sequência de zeros e uns, onde o zero é uma célula ativa e o um é uma célula que sofreu morte celular, onde cada célula ativa pode modificar-se de acordo com o modelo descrito no início da seção, tendo que a modificação consiste em morte celular e que a duplicação em reprodução celular, considerando que a célula que sofrer uma morte celular

irá permanecer no sistema, sem nenhuma alteração.

Ressaltamos que durante o desenvolvimento deste trabalho, a teoria construída foi apresentada nos seguintes eventos: Fourth Conference on Statistics and Data Science (1 a 3 de dezembro de 2022) e I Workshop de Divulgação Científica e Didáticas (7 de dezembro de 2022), tendo obtido premiação como terceira colocada.

Esta dissertação está organizada em 9 capítulos. No primeiro capítulo apresentamos uma introdução sobre o tema contendo as motivações e os objetivos para ele. No segundo capítulo serão definidos os conceitos necessários para o desenvolvimento do trabalho, a formalização do modelo que será utilizado e enunciados os principais teoremas.

A seguir, apresentaremos e provaremos resultados preliminares, que permitirão a prova de três dos cinco principais teoremas. No terceiro capítulo, serão provados os Teoremas 1, 2 e 3. Em seguida, serão definidos o Processo de Ramificação e o acoplamento, empregados para o desenvolvimento da prova do Teorema 4, que virá no sexto capítulo. Depois, será provado alguns resultados prévios e a prova do Teorema 5. No oitavo capítulo será exposto os resultados provenientes da simulação e por fim, serão feitas as considerações finais e sugestões de trabalhos futuros.

2 DEFINIÇÕES E TEOREMAS

Seja $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ o conjunto finito que chamamos de *alfabeto*, onde cada elemento $a \in \mathcal{A}$ é chamado de *letra*. Dizemos que $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ é o *espaço de configurações*. Se $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, dizemos que x é uma *configuração*. Podemos representar x por $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, onde $x_i \in \mathcal{A}$.

Uma configuração onde $x_i = a, \forall i \in \mathbb{Z}$ é chamada configuração *todos a* e denotada por $a_{\mathbb{Z}}$. Para uma configuração x , a *medida concentrada em x* é denotada por $\delta_{x_{\mathbb{Z}}}$.

Dado I subconjunto finito de \mathbb{Z} , definiremos um *cilindro fino* como qualquer conjunto da forma:

$$\{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : x_i = a_i, \forall i \in I\},$$

Denotaremos o *conjunto das medidas de probabilidade* em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, isto é, na σ -álgebra gerada por cilindros finos, por \mathcal{M} .

Dizemos que uma medida μ é *invariante por translação*, se dada uma lista de índices, $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\mu(x_{i_1} = a_1, \dots, x_{i_n} = a_n) = \mu(x_{i_1+j} = a_1, \dots, x_{i_n+j} = a_n).$$

Para uma medida invariante por translação, usamos a notação

$$\mu(a_1, \dots, a_n) = \mu(x_{i_1} = a_1, \dots, x_{i_n} = a_n).$$

Consideraremos somente medidas invariante por translação. Desse modo, \mathcal{M} denota o conjunto de tais medidas.

2.1 PALAVRAS E PALAVRAS ALEATÓRIAS

Chamamos de *palavra* qualquer sequência finita de zeros e uns. Definiremos o *comprimento* de uma palavra pelo número de zeros e uns que a compõe, e denotaremos por $|\cdot|$. Assim, denotaremos o comprimento da palavra W por $|W|$. O conjunto de todas as palavras possíveis é chamado de *dicionário* e denotado por dic , isto é, $\text{dic} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}^k$.

Seja Δ_X um subconjunto finito não-vazio de dic . Dizemos que X é uma palavra aleatória concentrada em Δ_X se para cada $V \in \Delta_X$, temos:

$$\mathbb{P}(X = V) > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{V \in \Delta_X} \mathbb{P}(X = V) = 1.$$

O conjunto das palavras aleatórias é denotado por Ω .

Sejam W e $V \in \text{dic}$. Dizemos que a *concatenação de W e V* , denotada por $\text{concat}(W, V)$, é a palavra L , obtida ao escrevermos W e V de modo subsequente, na ordem em que elas foram listadas.

Exemplo 1. Sejam $W, V \in \text{dic}$, onde $W = 0101$ e $V = 1110$. Dizemos que a palavra $L = 01011110$ é a concatenação de W e V .

Sejam W e $V \in \text{dic}$, onde $W = w_1 \dots w_m$ e $V = v_1 \dots v_n$, com $m \leq n$. Dizemos que W entra V na posição $j \in \{0, \dots, n - m\}$ se $i \in \{1, \dots, m\}$ implica que $w_i = v_{i+j}$.

Exemplo 2. Suponha que $W, V \in \text{dic}$ e que $m = 5$ e $n = 7$. Se W entra V , temos $j \in \{0, 1, 2\}$ e $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ o que gera três possíveis casos:

- se $j = 0$, temos que $w_i = v_{i+0}$, ou seja, $w_i = v_i$, então a sequência que corresponde a W será o início da sequência de V , até o $i = 5$.
- se $j = 1$, temos que $w_i = v_{i+1}$, isto é, a sequência que corresponde a W será o início da sequência de V que corresponde ao índice $i = 2$ até o índice $i = 6$.
- se $j = 2$, temos que $w_i = v_{i+2}$, isto é, a sequência que corresponde a W será o início da sequência de V que corresponde ao índice $i = 3$ até o índice $i = 7$.

Sob as nossas hipóteses de $m = 5$ e $n = 7$, faremos a seguinte ilustração. Seja $W = 01010$, a partir disso, nós temos que se $j = 0$, podemos ter V dada por: $V = 0101000$. Se $j = 1$, podemos ter V dada por: $V = 1010101$. E se $j = 2$, podemos ter V dada por: $V = 1101010$. Ou seja, W entra V .

A quantidade de posições, nas quais W entra V será denotada por $q_V(W)$.

Sejam $W, V \in \text{dic}$. Dizemos que a palavra W se *sobrepõe* se existe uma palavra V tal que $|V| < 2|W|$ e W entra V em duas posições diferentes. Se W não se sobrepõe, nós dizemos que a palavra W é *auto-evitante*.

Exemplo 3. Sejam $W, V \in \text{dic}$, em que $W = w_1 \dots w_m$ e $V = v_1 \dots v_n$. Para dizermos que W se sobrepõe, é necessário que exista uma palavra V , que satisfaça as condições acima. Então, seja $V = 0101010$ e $W = 01010$, temos que $7 = |V| < 2|W| = 10$ e que W entra V em duas posições diferentes, a saber, $j \in \{0, 2\}$. Portanto, W se sobrepõe.

Exemplo 4. Sejam $W, V \in \text{dic}$, em que $W = w_1 \dots w_m$ e $V = v_1 \dots v_n$. Tomemos $V = 0110001$, então:

- se $W = 1000$, embora $|V| < 2|W|$, W satisfaz as condições de ser auto-evitante, porque nós temos que W não entra em duas posições diferentes.
- se $W = 01$, notemos que W entra V em duas posições diferentes, ou seja, $j \in \{0, 5\}$, satisfazendo as condições de ser auto-evitante, uma vez que $|V| \geq 2|W|$.

Para $W \in \text{dic}$ e $X \in \Omega$ definimos a *quantidade de posições* que W entra X , $q_X(W)$, a variável aleatória, cuja distribuição é dada por:

$$\mathbb{P}(q_X(W) = k) = \sum_{V \in \Delta_X: q_V(W) = k} \mathbb{P}(X = V).$$

Denotamos $\mathbb{E}(\cdot)$ a esperança da palavra aleatória X . Definiremos a *densidade média das quantidades das posições que W entra X* por:

$$d_X(W) = \frac{\mathbb{E}(q_X(W))}{\mathbb{E}(|X|) - |W| + 1}.$$

Aqui fazemos algumas observações, que acreditamos serem imediatas, mas importantes:

- se $q_V(0) = |V|$, ou seja, a quantidade de vezes que o zero entra na palavra V é o comprimento da palavra V . Então, a palavra V é uma sequência de $|V|$ zeros.
- se $q_V(0) = 0$, ou seja, não há zeros na palavra V . Então, V é uma sequência de $|V|$ uns.

2.2 CONVERGÊNCIA E OPERADORES

Sejam $X_1, X_2, X_3, \dots \in \Omega$, onde para cada valor real positivo r , $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n| > r) = 0$ e $\mu \in \mathcal{M}$, diremos que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para μ e denotamos $X_n \rightarrow \mu$, se para toda $W \in \text{dic}$ e todo $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \implies |d_{X_n}(W) - \mu(W)| < \varepsilon.$$

Uma aplicação $P : \Omega \rightarrow \Omega$ é *consistente* se para qualquer $\mu \in \mathcal{M}$ e sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $X_n \rightarrow \mu$, a sequência X_1P, X_2P, X_3P, \dots converge para único $\nu \in \mathcal{M}$, isto é, $X_nP \rightarrow \nu, \forall X_n \rightarrow \mu$.

Seja P consistente, $\mu \in \mathcal{M}$ e $X_n \rightarrow \mu$. Nós definimos μP (a aplicação de P em μ) como a medida, ν , para a qual $X_n P \rightarrow \nu$. Nessas condições, usaremos, em alguns casos, a notação $\mu P = \nu$.

Seja P consistente, $\mu \in \mathcal{M}$ e $X_n \rightarrow \mu$. Dizemos que μ é *invariante sob* P , se para qualquer sequência de palavras aleatórias $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde $X_n \rightarrow \mu$, tivermos $X_n P \rightarrow \mu$. O operador P é *ergódico* se existe única medida invariante $\nu \in \mathcal{M}$ para P e para cada $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde $X_n \rightarrow \mu$, para algum $\mu \in \mathcal{M}$ e n suficientemente grande a partir do qual tivermos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_n P^t = \nu.$$

Neste caso, em nosso texto, poderemos usar a notação $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P^t = \nu$.

Quando P não satisfizer as condições de ergodicidade, será considerado *não-ergódico*.

Seja X palavra aleatória. Definimos

$$t_{\{X,p\}} = \inf\{t > 0 : q_{X P^t}(0) = 0\}. \quad (2.1)$$

Se o lado direito de (2.1) for o conjunto vazio, então $t_{\{X,p\}}$ será igual a infinito.

Quando for mencionado a variação do parâmetro p , denotaremos (2.1) simplesmente por t_X .

Dados $\mu \in \mathcal{M} \setminus \{\delta_{1z}\}$ onde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P^t = \delta_{1z}.$$

Se para cada sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de palavras aleatórias, convergindo para δ_{1z} , tivermos para cada X_n , $\mathbb{E}(t_{X_n})$ finito. Então, diremos que μP^t *converge localmente* para δ_{1z} com tempo médio finito. Caso exista algum X_n tal que $\mathbb{E}(t_{X_n})$ é infinito, diremos que μP^t *converge localmente* para δ_{1z} com tempo médio infinito.

2.3 NOSSO MODELO E CONSISTÊNCIA

Ao longo desta dissertação vamos tratar do seguinte caso particular do modelo (1.1):

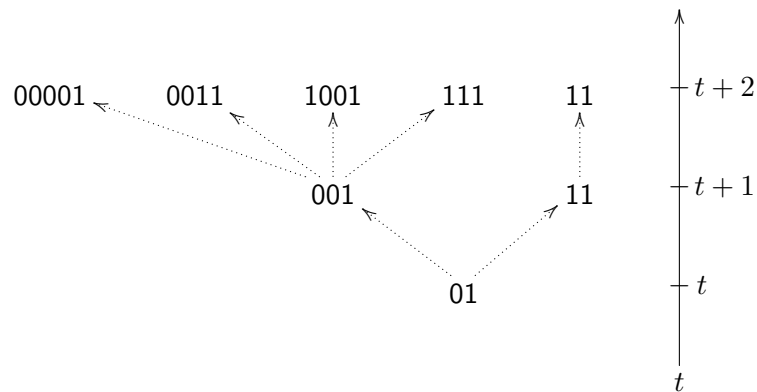
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{com probabilidade } p. \\ 00 \quad \text{com probabilidade } 1 - p. \end{array} \right. \\ 1 \rightarrow 1 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

em que o 0 (zero) pode sofrer uma duplicação (expansão), com probabilidade $1 - p$, ou uma mutação (modificação) para o 1 (um), com probabilidade p , também conhecida como ponto de mutação.

O operador de transição descrito em (2.2), será denotado por P .

Consideremos a sequência inicial 01 , no passo t . As possibilidades para o passo $t + 1$ são: 001 e 11 , pois somente o elemento zero pode sofrer alguma mudança. A Figura 1 mostra a evolução da palavra $W = 01$ considerando os dois primeiros passos de tempo.

Figura 1 – A evolução da palavra $W = 01$, de acordo com a variação do tempo t .



Fonte: A autora (2022)

Observemos que se $\delta_{1z}P = \delta_{1z}$, temos que δ_{1z} é uma distribuição invariante de (2.2).

Uma das nossas metas é mostrar que P é um operador consistente. Mas, antes de mostrarmos isto, vamos citar alguns resultados provados em (TOOM et al., 2011). No referido trabalho, foram definidos cinco operadores de substituição (conversão, inserção, remoção, compressão e descompressão) e foi mostrado que eles são consistentes. Desses, descreveremos três:

Seja $\mathcal{A} = \{a, b\}$ e \mathcal{A}_1 um alfabeto finito e não vazio tal que \mathcal{A}_1 e \mathcal{A} são disjuntos. Também denotamos o dicionário cujo alfabeto é \mathcal{A} por $\text{dic}(\mathcal{A})$.

- **conversão:** Para letras $a, b \in \mathcal{A}$, cada a é substituído por b de forma independente com probabilidade $p \in [0, 1]$ ou nada acontece com probabilidade $1 - p$.
- **compressão:** Seja $G \in \text{dic}(\mathcal{A})$, uma palavra não vazia e auto-evitante e $c \in \mathcal{A}_1$. Sob sua ação cada palavra G será substituída por c de forma independente com probabilidade 1.
- **descompressão:** Seja $H \in \text{dic}(\mathcal{A})$, uma palavra não vazia e auto-evitante e letra $c \in \mathcal{A}_1$. Sob sua ação cada letra c será substituída por H de forma independente com probabilidade 1.

2.4 PRINCIPAIS RESULTADOS

Teorema 1. O operador P , definido em (2.2), é consistente.

Analisemos o comportamento de μP^t quando t tende para o infinito ao tomarmos $p \in \{0, 1\}$.

Teorema 2. Seja p , a probabilidade descrita em (2.2):

(a) Se $p = 1$, então $\mu P = \delta_{1_{\mathbb{Z}}}, \forall \mu \in \mathcal{M}$.

(b) Se $p = 0$, então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P^t = \begin{cases} \delta_{0_{\mathbb{Z}}} & \text{se } \mu(0) > 0. \\ \delta_{1_{\mathbb{Z}}} & \text{se } \mu(0) = 0. \end{cases}$$

Pelo Teorema 2 quando $p = 1$, o operador P é ergódico.

Definimos

$$f(p) = \frac{2p - 1}{p - 1}. \quad (2.3)$$

Teorema 3. Seja $p \in (0, 1)$. Em nosso processo, a medida $\delta_{1_{\mathbb{Z}}}$ é invariante e, se $p < \frac{1}{2}$ e $\mu(0) = f(p)$, então $\mu P(0) = \mu(0)$.

Notemos que a existência de uma única medida invariante não implica que possuímos ergodicidade. Esta questão, para autômatos celulares probabilísticos (ACP) teve resposta em (CHASSAING; MAIRESSE, 2011), em um período de 50 anos após ter sido proposto. No referido trabalho, os autores propuseram um ACP com uma única medida invariante, ν , contudo há ao menos uma condição inicial para a qual o processo não converge para ν . Sob esta ótica, o Teorema 3 propõe a existência de ergodicidade para $p \geq \frac{1}{2}$. Mas, é o Teorema 4 que estabelece esse comportamento.

Teorema 4. Seja p , a probabilidade descrita em (2.2). Para $p \geq \frac{1}{2}$, temos:

(T4.1) P é ergódico.

(T4.2) μP^t converge localmente para $\delta_{1_{\mathbb{Z}}}$ com tempo médio finito se $p > \frac{1}{2}$ e, μP^t converge localmente para $\delta_{1_{\mathbb{Z}}}$ com tempo médio infinito se $p = \frac{1}{2}$.

Além disso, para $p > \frac{1}{2}$, e para cada palavra aleatória, X_n , da sequência convergindo para μ , temos $\mathbb{E}(t_{X_n}) > \frac{1}{p}$.

O Teorema 4 mostra que embora o processo seja ergódico para $p \geq \frac{1}{2}$, para estes mesmos parâmetros surge um outro tipo de transição de fase, a qual está associada a velocidade média local de convergência do processo. De modo informal, dada uma sequência arbitrária de palavras aleatórias convergindo para μ e tomando-se qualquer palavra aleatória, X , desta sequência, teremos que o tempo médio para $q_{XP^t}(0) = 0$ pela primeira vez, será finito se $p > \frac{1}{2}$ e infinito se $p = \frac{1}{2}$. Neste último, a qualquer momento que seja observado $q_{XP^t}(0)$, ela será positiva.

Teorema 5. Seja p a probabilidade descrita em (2.2). Para $p < \frac{1}{2}$, P é não-ergódico. Além disso, para $\mu \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(0) > 0$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P^t(0) = f(p).$$

Vimos no Teorema 3 que δ_{1_z} é uma medida invariante para P , independente de p . Se existir outra medida invariante para P , ν , quando $p < \frac{1}{2}$, então do Teorema 5 poderemos concluir que para a combinação convexa de δ_{1_z} e ν , denotada por π , que $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi P^t(0) = f(p)$ o qual difere de $\pi(0)$. Logo, π não é invariante sob P . Isto mostraria que diferente dos autômatos celulares probabilísticos nosso processo não é linear.

3 RESULTADOS PRELIMINARES

Sejam os operadores de substituição: conversão, compressão e descompressão, apresentados na seção anterior, os quais denotamos aqui por P_{conv} , P_{comp} e $P_{descomp}$, respectivamente. E seja 2 uma letra que não pertence ao alfabeto \mathcal{A} , vamos assumir que:

- $P_{conv} : 0 \xrightarrow{p} 1$, o operador P_{conv} transforma, de forma independente, cada letra zero numa letra um com probabilidade p ou nada acontece com a probabilidade $1 - p$.
- $P_{comp} : 0 \xrightarrow{1} 2$, o operador P_{comp} atua de forma determinística, substituindo cada zero por 2.
- $P_{descomp} : 2 \xrightarrow{1} 00$, o operador $P_{descomp}$, atuando de forma determinística, substituí cada 2 pela palavra 00.

Denotaremos a composição dos operadores P_{conv} , P_{comp} e $P_{descomp}$ (nesta ordem) por:

$$P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp}. \quad (3.1)$$

Com base nas definições dos operadores apresentados por (TOOM et al., 2011) e citados na seção anterior, temos que os operadores acima são consistentes.

Lema 1. O operador (3.1) é consistente.

Prova . Como P_{conv} é consistente, segue que para cada $\mu \in \mathcal{M}$ e para toda $X_1, X_2, \dots \in \Omega$ tal que $X_n \rightarrow \mu$ temos $X_n P_{conv} \rightarrow \mu P_{conv} \in \mathcal{M}$. Desse modo,

$$(X_n P_{conv}) P_{comp} \rightarrow \mu P_{conv} P_{comp} \in \mathcal{M}.$$

Além disso,

$$(X_n P_{conv} \circ P_{comp}) P_{descomp} \rightarrow \mu P_{conv} P_{comp} P_{descomp} \in \mathcal{M}.$$

Assim, concluímos, que $P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp}$ é consistente. ■

Dado $\mu \in \mathcal{M}$ e $P : \Omega \rightarrow \Omega$, definimos *extensão de μ sob P* por:

$$Ext(\mu | P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(|X_n P|)}{\mathbb{E}(|X_n|)} \quad (3.2)$$

para qualquer $X_1, \dots \in \Omega$ tal que $X_n \rightarrow \mu$.

Então, informalmente falando, $Ext(\mu | P)$ é o *coeficiente de contração/dilatação* que P multiplica o comprimento de uma palavra aproximando μ .

Lema 2. Seja P um operador consistente, $\mu \in \mathcal{M}$, $X_1, X_2, \dots \in \Omega$, tal que $X_n \rightarrow \mu$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{X_n P}(W) = \frac{1}{Ext(\mu | P)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(q_{X_n P}(W))}{\mathbb{E}(|X_n|)}, \forall W \in \text{dic}.$$

Além disso,

$$Ext(\mu | P) = 1 + (1 - p)\mu(0).$$

Prova . Seja

$$\begin{aligned} d_{X_n P}(W) &= \frac{\mathbb{E}(q_{X_n P}(W))}{\mathbb{E}(|X_n P|) - |W| + 1} \\ &= \frac{\frac{\mathbb{E}(q_{X_n P}(W))}{\mathbb{E}(|X_n|)}}{\frac{\mathbb{E}(|X_n P|) - |W| + 1}{\mathbb{E}(|X_n|)}}. \end{aligned}$$

Supondo que os limites do numerador e do denominador existam, nós temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{X_n P}(W) = \frac{1}{Ext(\mu | P)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(q_{X_n P}(W))}{\mathbb{E}(|X_n|)}. \quad (3.3)$$

Seja B variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros $q_{X_n}(0)$ e $(1 - p)$, temos:

$$|X_n P| = |X_n| + B.$$

Logo, usando (3.2),

$$\begin{aligned} Ext(\mu | P) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + (1 - p) \frac{\mathbb{E}(q_{X_n}(0))}{\mathbb{E}(|X_n|)} \right] \\ &= 1 + (1 - p)\mu(0). \end{aligned}$$

■

Proposição 1. Seja $\mu \in \mathcal{M}$. Logo

$$\mu P(0) = \frac{2(1 - p)\mu(0)}{1 + (1 - p)\mu(0)} \text{ e } \mu P(1) = \frac{1 + (p - 1)\mu(0)}{1 + (1 - p)\mu(0)}.$$

Prova . Primeiro provaremos esse resultado para palavras. Em seguida, para palavras aleatórias. Sejam $\mu \in \mathcal{M}$ e $V_1, V_2, \dots \in \text{dic}$ onde $V_n \rightarrow \mu$. Logo, para cada palavra W e ε positivo,

$$\exists n_0 \text{ tal que } n > n_0 \implies |d_{V_n}(W) - \mu(W)| < \varepsilon.$$

Lembremos que, por definição,

$$d_{V_n}(W) = \frac{q_{V_n}(W)}{|V_n| - |W| + 1}.$$

Sob essas condições, vamos mostrar que $V_n \mathbf{P}(0) \rightarrow \frac{2(1-p)\mu(0)}{1+(1-p)\mu(0)}$.

Sejam B_1 e B_2 variáveis aleatórias com distribuição binomial com parâmetros $(q_{V_n}(0), p)$ e $(q_{V_n}(0), 1-p)$, respectivamente. Então, pelo Lema 2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d_{V_n \mathbf{P}(0)} &= \frac{1}{\text{Ext}(\mu | \mathbf{P})} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(q_{V_n \mathbf{P}(0)})}{|V_n|} \\ &= \frac{1}{1 + (1-p)\mu(0)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(q_{V_n}(0) - B_1 + B_2)}{|V_n|} \\ &= \frac{1}{1 + (1-p)\mu(0)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1-p)q_{V_n}(0)}{|V_n|} \\ &= \frac{2(1-p)\mu(0)}{1 + (1-p)\mu(0)}. \end{aligned}$$

De modo análogo, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d_{V_n \mathbf{P}(1)} &= \frac{1}{1 + (1-p)\mu(0)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(q_{V_n}(1) + B_1)}{|V_n|} \\ &= \frac{1}{1 + (1-p)\mu(0)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(|V_n| - q_{V_n}(0) + B_1)}{|V_n|} \\ &= \frac{1 + (p-1)\mu(0)}{1 + (1-p)\mu(0)}. \end{aligned}$$

Agora, para palavras aleatórias, tomemos $X_1, X_2, \dots \in \Omega$ tal que $X_n \rightarrow \mu$ com $\mu \in \mathcal{M}$.

Usando o Lema 2:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d_{X_n \mathbf{P}(0)} &= \frac{1}{\text{Ext}(\mu | \mathbf{P})} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(q_{X_n \mathbf{P}(0)})}{\mathbb{E}(|X_n|)} \\ &= \frac{1}{1 + (1-p)\mu(0)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(q_{X_n}(0) - B_1 + B_2)}{\mathbb{E}(|X_n|)}. \end{aligned}$$

Notemos que, para B_1 , pela lei da esperança total, temos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(B_1 \mid \mathbf{q}_{X_n}(0) = k) \mathbb{P}(\mathbf{q}_{X_n}(0) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} pk \mathbb{P}(\mathbf{q}_{X_n}(0) = k) \\ &= p\mathbb{E}(\mathbf{q}_{X_n}(0)).\end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos

$$\mathbb{E}(B_2) = (1 - p)\mathbb{E}(\mathbf{q}_{X_n}(0)).$$

Daí,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{X_n P}(0) = \frac{1}{1 + (1 - p)\mu(0)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1 - p)\mathbb{E}(\mathbf{q}_{X_n}(0))}{\mathbb{E}(|X_n|)}.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{X_n P}(0) = \frac{2(1 - p)\mu(0)}{1 + (1 - p)\mu(0)}.$$

Agora, sob as mesmas condições acima, calculemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{X_n P}(1) = \frac{1}{1 + (1 - p)\mu(0)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(\mathbf{q}_{X_n}(1) + B_1)}{\mathbb{E}(|X_n|)}.$$

Já sabemos que, para B_1 :

$$\mathbb{E}(B_1) = p\mathbb{E}(\mathbf{q}_{X_n}(0)).$$

E que

$$\mathbf{q}_{X_n}(1) + \mathbf{q}_{X_n}(0) = |X_n|.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} d_{X_n P}(1) &= \frac{1}{1 + (1 - p)\mu(0)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(\mathbf{q}_{X_n}(1) + B_1)}{\mathbb{E}(|X_n|)} \\ &= \frac{1}{1 + (1 - p)\mu(0)} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{(p - 1)\mathbb{E}(\mathbf{q}_{X_n}(0))}{\mathbb{E}(|X_n|)} \\ &= \frac{1 + (p - 1)\mu(0)}{1 + (1 - p)\mu(0)}.\end{aligned}$$



4 PROVA DOS TEOREMAS 1, 2 E 3

Prova do Teorema 1. Primeiro, provaremos que para cada palavra $V \in \text{dic}$,

$$\mathbb{P}(VP = V(P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp})) = 1. \quad (4.1)$$

Sejam i_1, \dots, i_k as posições de $V \in \text{dic}$ tais que $v_{i_j} = 0$ e L a palavra obtida de V após a ação do operador P , onde exatamente l (com $l \leq k$) dos zeros em V tornaram-se um. Daí,

$$\mathbb{P}(VP = L) = p^l(1-p)^{k-l}. \quad (4.2)$$

Seja L' a palavra obtida de V após a ação de P_{conv} , em que exatamente l (com $l \leq k$) dos zeros em V tornaram-se um. Assim,

$$\mathbb{P}(VP_{conv} = L') = p^l(1-p)^{k-l} \quad (4.3)$$

Notemos que os conjuntos Δ_{VP} e $\Delta_{VP_{conv}}$ têm a mesma quantidade de palavras, a saber, $2^{q_V(0)}$. Além disso, para cada $L' \in \Delta_{VP_{conv}}$ existe único $L \in \Delta_{VP}$ tal que $L'(P_{comp} \circ P_{descomp}) = L$. Desse modo, $\Delta_{VP} = \Delta_{V(P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp})}$. Portanto, por (4.2) e (4.3), temos a seguinte cadeia de identidades

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(VP = L) &= \mathbb{P}(VP_{conv} = L') \\ &= \mathbb{P}(V(P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp}) = L'(P_{comp} \circ P_{descomp})) \\ &= \mathbb{P}(V(P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp}) = L). \end{aligned}$$

Logo, provamos (4.1), isto é, para cada $V \in \text{dic}$, VP e $V(P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp})$ possuem a mesma distribuição. Como consequência, $\forall W \in \text{dic}$, $q_{V(P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp})}(W)$ e $q_{VP}(W)$ tem a mesma distribuição. Logo,

$$\mathbb{E}(q_{VP}(W)) = \mathbb{E}(q_{V(P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp})}(W))$$

e

$$\mathbb{E}(|VP|) = \mathbb{E}(|V(P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp})|).$$

Daí,

$$d_{VP}(W) = d_{V(P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp})}(W).$$

Desta forma, se $V_1, V_2, \dots \in \text{dic}$ e $\mu \in \mathcal{M}$, tal que $V_n \rightarrow \mu$, então pelo Lema 1,

$$V_n P \rightarrow \mu P \text{ se e só se } V_n(P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp}) \rightarrow \mu P.$$

Além dessa prova, podemos considerar o operador $P \equiv P_{conv} \circ P_{comp} \circ P_{descomp}$. E pelo Lema 1, o resultado segue. ■

Prova do Teorema 2. Utilizando a Proposição 1, para $p = 1$, temos que $\mu P(1) = 1$.

Agora, a prova do item (b) segue. Novamente, fazendo uso da Proposição 1, para $p = 0$.

Assim,

$$\mu P(0) = \frac{2\mu(0)}{1 + \mu(0)}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \mu P^t(0) - \mu P^{t+1}(0) &= \mu P^t(0) - \frac{2\mu P^t(0)}{1 + \mu P^t(0)} \\ &= \frac{\mu P^t(0)(1 + \mu P^t(0)) - 2\mu P^t(0)}{1 + \mu P^t(0)}. \end{aligned}$$

Fazendo $\mu P^t(0) = k$, nós temos que:

$$\begin{aligned} \mu P^t(0) - \mu P^{t+1}(0) &= \frac{k + k^2 - 2k}{1 + k} \\ &= \frac{k^2 - k}{1 + k}. \end{aligned}$$

Com $k \in (0, 1)$ implica que $k - 1 \leq 0$ e assim, $k^2 - k < 0$. Desse modo,

$$\mu P^t(0) - \mu P^{t+1}(0) < 0.$$

Ou seja,

$$\mu P^t(0) < \mu P^{t+1}(0).$$

Como é conhecido da análise na reta, toda sequência monótona crescente e limitada é convergente. Neste caso, este limite é igual ao supremo da sequência. Ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P^t(0) = 1.$$

■

Prova do Teorema 3. Seja $p \in (0, 1)$. Pela Proposição 1.

$$\mu P(0) = \frac{2(1-p)\mu(0)}{1 + (1-p)\mu(0)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mu P(0) = \mu(0) &\Leftrightarrow \frac{2(1-p)\mu(0)}{1 + (1-p)\mu(0)} = \mu(0) \\ &\Leftrightarrow 2(1-p)\mu(0) = \mu(0) + (1-p)\mu(0)^2 \\ &\Leftrightarrow (1-2p)\mu(0) - (1-p)\mu(0)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \mu(0)[(1-2p) - (1-p)\mu(0)] = 0 \\ &\Leftrightarrow \mu(0) \in \{0, f(p)\}.\end{aligned}$$

Notemos que $f(p) \leq 0$ se e só se $p \geq \frac{1}{2}$. Portanto, se $p \geq \frac{1}{2}$, então $\mu P(0) = \mu(0)$ somente para $\mu(0) = 0$.

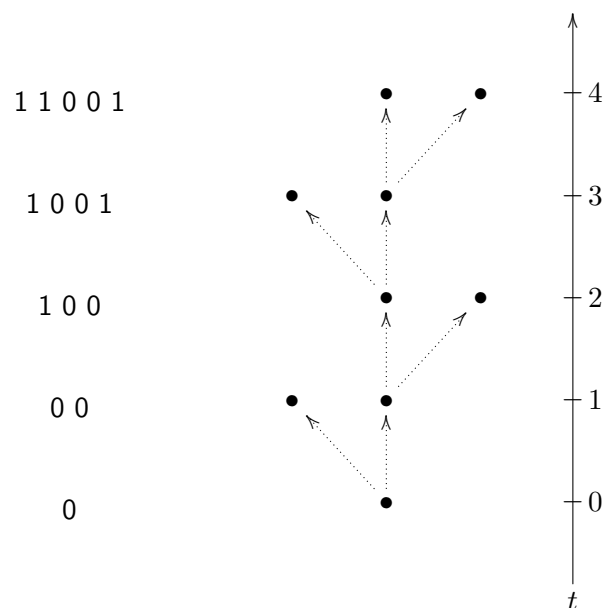
■

5 UM ACOPLAMENTO $q_{W_t}(0)$

Consideraremos as seguintes definições: $\mathbb{P}_1(R_t = i) = \mathbb{P}(R_t = i \mid R_0 = 1)$ e $\mathbb{E}_1(R_t = i) = \mathbb{E}(R_t = i \mid R_0 = 1)$, estas são, respectivamente, a probabilidade e a esperança condicional do processo R_t considerando apenas um ancestral, no passo inicial. Seja $(R_t)_{t \in \mathbb{N}}$ um processo de ramificação, onde $\mathbb{P}_1(R_1 = 0) = p$ e $\mathbb{P}_1(R_1 = 2) = 1 - p$, com $p \in (0, 1)$. É bem conhecido (ver Auxiliar 1) que se $\mathbb{E}_1(R_1) \leq 1$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_1(R_t = 0) = 1$. Ou seja, se $p \geq \frac{1}{2}$, então o processo é absorvente, isto é, atinge o estado zero com probabilidade 1, quanto t tende ao infinito.

Na prova que segue, faremos uso de um acoplamento ("construção simultânea de duas Cadeias de Markov, no mesmo espaço de probabilidade" (FERRARI; GALVES, 2000)) entre o processo de ramificação com um único "ancestral" e a evolução da palavra $W = 0$. Na Figura 2, observando o seu lado esquerdo, temos uma possível evolução da palavra W , que ocorre com probabilidade positiva. Já do lado direito, temos a correspondente evolução do processo de ramificação, ao longo do tempo. Além disso, podemos observar que os descendentes do processo de ramificação são apenas as palavras $W = 0$ que replicaram com probabilidade positiva através do tempo. E, embora as palavras $V = 1$ sejam mantidas no sistema, elas não causam perturbação (influência) no processo de ramificação.

Figura 2 – Uma possível evolução da palavra $W = 0$, de acordo com a variação do tempo t , e a correspondente evolução do processo de ramificação.



Fonte: A autora (2022)

Sejam $(\zeta_{t,k}^1)_{(t,k) \in \mathbb{N}^2}$ e $(\zeta_{t,k}^2)_{(t,k) \in \mathbb{N}^2}$ duas sequências de variáveis aleatórias bi-indexadas, independentes e identicamente distribuídas, onde para $i \in \{1, 2\}$,

$$\mathbb{P}(\zeta_{t,k}^i = 0) = p \text{ e } \mathbb{P}(\zeta_{t,k}^i = 2) = 1 - p.$$

O processo de ramificação R_t para cada t e $R_0 = 1$ é escrito da forma

$$R_{t+1} = \sum_{k=1}^{R_t} \zeta_{t,k} \quad (5.1)$$

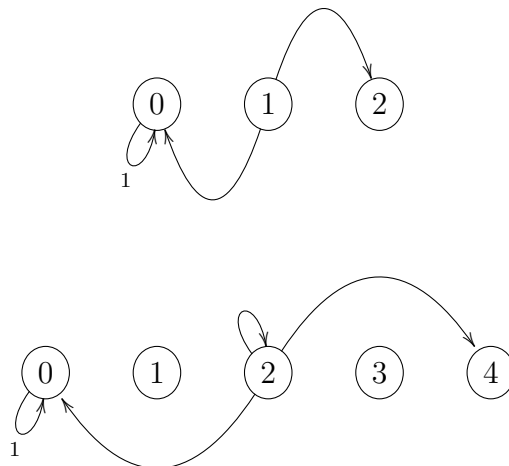
em que R_t é o número de descendentes na t -ésima geração.

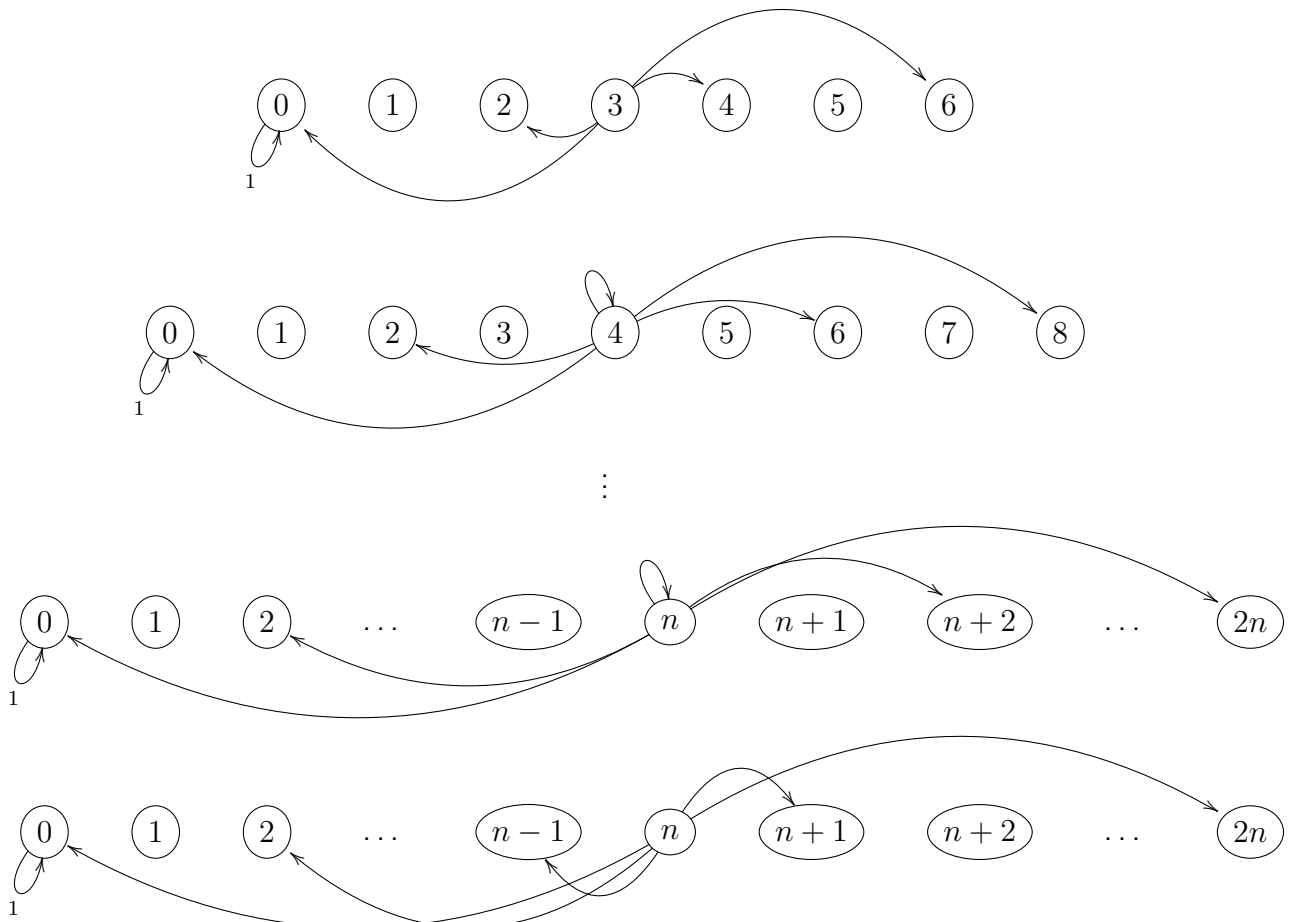
O nosso processo $(R_t)_{t \in \mathbb{N}}$ é uma Cadeia de Markov (C.M.) com espaço de estados $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$, e probabilidade de transição, do passo de tempo t para $t + 1$, que é associada a uma distribuição binomial com parâmetros n e p :

$$\mathbb{P}(R_{t+1} = 2(n - k) \mid R_t = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} & \text{se } k \in 0, \dots, n; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.2)$$

Embora não seja muito usual, na Figura 3 apresentamos o diagrama de transição para essa Cadeia de Markov. O único estado absorvente é o zero, isto é, $\mathbb{P}(R_{t+1} = 0 \mid R_t = 0) = 1$. Notemos que se a Cadeia de Markov assume valor par, denotado por n , num dado passo de tempo, o próprio estado n é visitado, com probabilidade positiva, no passo de tempo subsequente, isto é, $\mathbb{P}(R_{t+1} = n \mid R_t = n) > 0$ e quando n assume valores ímpares tal comportamento não ocorre, ou seja, $\mathbb{P}(R_{t+1} = n \mid R_t = n) = 0$.

Figura 3 – Diagrama de transição do processo R_t . Neste processo, independente do valor de n , todos os estados pares são visitados. Podemos notar um comportamento padrão para os valores que n assume, isto é, quando n assume valores pares, temos que o estado n é visitado, já quando n assume valores ímpares o estado n não é visitado.





Fonte: A autora (2022)

Vejamos uma outra representação para o processo R_t . Sejam $(\zeta_i^t)_{(i,t) \in \mathbb{N}^2}$ uma sequência de variáveis aleatórias bi-indexadas, independentes e identicamente distribuídas, sendo:

$$\mathbb{P}(\zeta_i^t = 1) = p \text{ e } \mathbb{P}(\zeta_i^t = 0) = 1 - p.$$

O processo R_t descrito em (5.2) pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} R_{t+1} &= R_t - \sum_{k=1}^{R_t} \zeta_k^t + \sum_{k=1}^{R_t} (1 - \zeta_k^t) \\ &= 2 \left(R_t - \sum_{k=1}^{R_t} \zeta_k^t \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Lema 3. Seja $(R_t)_{t \in \mathbb{N}}$ nosso processo de ramificação com $R_0 = 1$. Logo,

$$\mathbb{E}_1(R_t) = (2(1-p))^t \quad (5.4)$$

e

$$Var_1(R_t) = \begin{cases} \frac{(4(1-p)p(2(1-p))^t((2(1-p))^{t-1}))}{2(1-p)-1}, & \text{se } \mathbb{E}_1(R_1) \neq 1; \\ 4t(1-p)p, & \text{se } \mathbb{E}_1(R_1) = 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

Prova . É uma consequência de Auxiliar 3, assim concluímos a prova. ■

Lema 4. Seja $\mathbb{E}(R_{t+1})$, a esperança de R_{t+1} . Temos que

$$\mathbb{E}(R_{t+1}) = [2(1 - p)]\mathbb{E}(R_t). \quad (5.6)$$

Prova . Através da equação (5.3) e aplicando a esperança em ambos os lados da igualdade, obtemos:

$$\mathbb{E}(R_{t+1}) = 2 \left(\mathbb{E}(R_t) - \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{R_t} \zeta_k^t \right) \right). \quad (5.7)$$

Pela lei da esperança total, temos que a segunda parcela da expressão acima, se torna

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{R_t} \zeta_k^t \right) = p\mathbb{E}(R_t).$$

Substituindo esse resultado na expressão (5.7), temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_{t+1}) &= 2 (\mathbb{E}(R_t) - p\mathbb{E}(R_t)) \\ &= 2(1 - p)\mathbb{E}(R_t). \end{aligned}$$

■

Lema 5. Seja $\mathbb{E}_i(R_{t+1})$, a esperança de R_{t+1} dado que $R_0 = i$. Temos que

$$\mathbb{E}_i(R_{t+1}) = [2(1 - p)]^{t+1} R_0.$$

Prova . Prova por indução.

Seja $k = 0$, então, por (5.4),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i(R_{k+1}) &= \mathbb{E}_i(R_1) \\ &= 2(1 - p)R_0. \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que seja verdade para $k = t - 1$, isto é,

$$\mathbb{E}_i(R_t) = [2(1 - p)]^t R_0. \quad (5.8)$$

Vamos provar que é verdade para $k = t$.

Pelo Lema 4:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i(R_{t+1}) &= [2(1-p)]\mathbb{E}_i(R_t) \\ &= [2(1-p)]^{t+1}R_0, \text{ por (5.8).}\end{aligned}$$

Então, pelo princípio da indução, o resultado está provado. ■

Da nossa definição para P atuando na palavra $W = 0$, temos

$$\mathbf{q}_{W_{t+1}}(0) = \sum_{k=1}^{\mathbf{q}_{W_t}(0)} \zeta_{t,k}. \quad (5.9)$$

Para uma mesma sequência $(\zeta_{t,k})_{(t,k) \in \mathbb{N}^2}$, definimos nosso acoplamento de (5.1) e (5.9) por:

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_0, \mathbf{q}_{W_0}(0)) = (1, 1). \\ (R_t, \mathbf{q}_{W_t}(0)) = \left(\sum_{k=1}^{R_{t-1}} \zeta_{t,k}, \sum_{k=1}^{\mathbf{q}_{W_{t-1}}(0)} \zeta_{t,k} \right). \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Lema 6. Seja $W \in \text{dic}$ tal que $\mathbf{q}_W(0) = 1$. Se $p \geq \frac{1}{2}$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{q}_{W_t}(0) = 0) = 1.$$

Prova . Por (5.10),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{(1,1)} \left((R_t, \mathbf{q}_{W_t}(0)) = (0, 0) \right) = 1 \text{ se só se } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_1(R_t = 0) = 1$$

onde $\mathbb{P}_{(1,1)}$ denota a probabilidade de acoplamento ter iniciado no estado $(1, 1)$. Contudo, sabemos (ver Auxiliar 1) que se $p \geq \frac{1}{2}$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_1(R_t = 0) = 1$. Desse modo, concluímos nossa prova. ■

Saber quando o processo de ramificação será extinto ou não é um ponto crucial. Todavia, outras questões são igualmente relevantes. Por exemplo, assumindo que ocorre a extinção (casos subcríticos e críticos), qual será a distribuição do tempo de extinção, T . De maneira formal,

$$T = \inf\{t > 0 : R_t = 0\}. \quad (5.11)$$

Neste ponto, consideraremos $\mathbb{E}_1(R_1) < 1$, isto é, $p > \frac{1}{2}$ e descreveremos a distribuição de T para o nosso processo de ramificação. Além de algumas outras caracterizações de nosso interesse, seja X variável aleatória com

$$\mathbb{P}(X = 0) = p \text{ e } \mathbb{P}(X = 2) = 1 - p.$$

Sua função geratriz ordinária é dada por

$$h(z) := \mathbb{E}(z^X)$$

onde

$$\mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)z^k = p + (1 - p)z^2. \quad (5.12)$$

Seja E_t , o evento que denota o número de descendentes na t -ésima geração, sendo igual a zero, isto é, $R_t = 0$. Dado que $R_0 \geq 1$, tem-se que E_0 será o conjunto vazio. Além disso, notemos que $(E_t)_{t \geq 0}$ é uma sequência monótona crescente de eventos. Ou seja,

$$E_t \subset E_{t+1}, \forall t \in \mathbb{N}.$$

Sendo a função geratriz ordinária de R_1 , a $h(z)$. Sabemos que a função geratriz ordinária de R_t é $\underbrace{h(\dots h(z) \dots)}_{t \text{ vezes}}$, a qual denotamos $h^t(z)$. Disto, é bem conhecido que

$$\mathbb{P}_{R_0}(R_t = 0) = \mathbb{P}_{R_0}(E_t) = h^t(0).$$

Também,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{R_0}(T = t) &= \mathbb{P}_{R_0}(E_t - E_{t-1}) \\ &= \mathbb{P}_{R_0}(E_t) - \mathbb{P}_{R_0}(E_{t-1}) \\ &= h^t(0) - h^{t-1}(0). \end{aligned} \quad (5.13)$$

É evidente que, $\mathbb{P}_{R_0}(T = 0) = 0$ e $\mathbb{P}_{R_0}(T = 1) = h^1(0) - h^0(0) = p$, pois $h^0(z) = z$.

De (5.13) provamos que, para $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$,

$$\mathbb{P}_{R_0}(T \leq k) = \sum_{l=0}^k \mathbb{P}_{R_0}(T = l) = \sum_{l=1}^k (h^l(0) - h^{l-1}(0)) = h^k(0).$$

Notemos que $h^k(0) = h(h^{k-1}(0)) = h(\mathbb{P}_{R_0}(T \leq k - 1))$.

Esta análise de T é utilizada no estudo de surtos epidêmicos (FARRINGTON; GRANT, 1999).

Lema 7. A distribuição acumulada de T é dada por:

$$\mathbb{P}_1(T \leq k) = p + q \left(p + q \left(p + q \left(\underbrace{\quad \dots \quad}_{k-1 \text{ elementos}} \left(p + q \left(p + qp^2 \right)^2 \right) \right) \right) \right)^2,$$

em que $q = 1 - p$.

Prova . Prova por indução.

Usando (5.13) temos que

$$\mathbb{P}_1(T \leq 1) = h(\mathbb{P}_1(T \leq 0)) = h(0) = p.$$

Agora, suponhamos que seja verdade para k , ou seja,

$$\mathbb{P}_1(T \leq k) = h^k(p).$$

Vamos provar que é verdade para $k + 1$, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_1(T \leq k + 1) &= h(\mathbb{P}_1(T \leq k)) \\ &= h(h^k(p)) \\ &= h^{k+1}(p). \end{aligned}$$

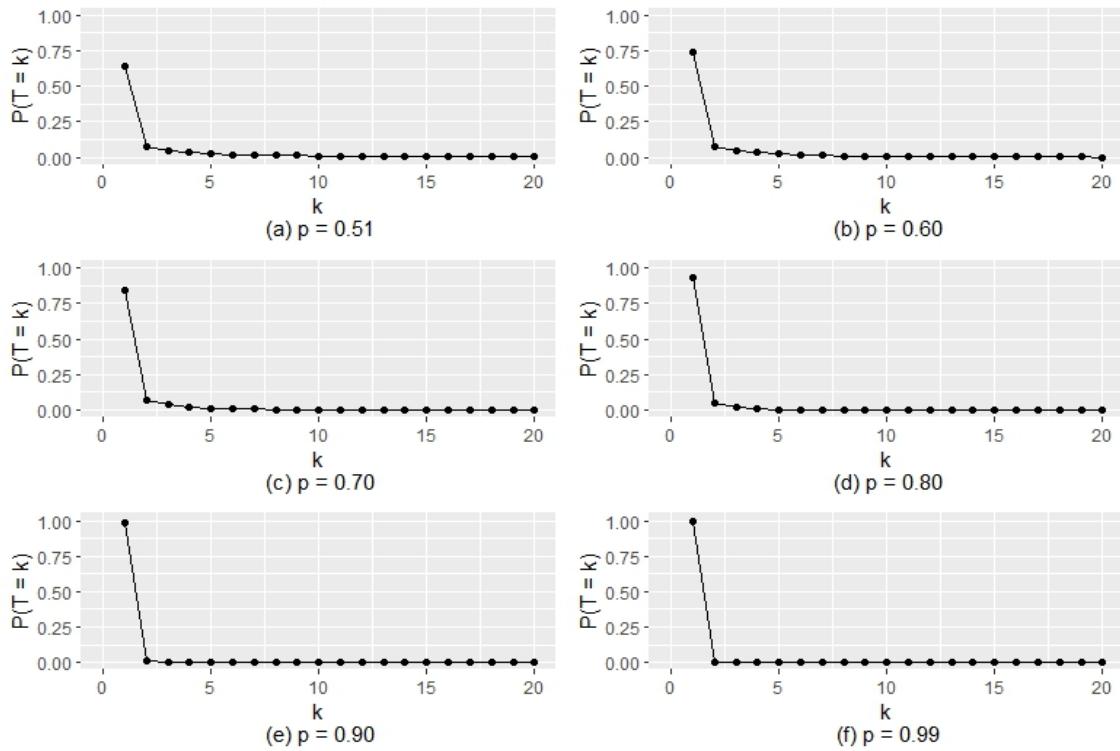
Como $h(z) = p + (1 - p)z^2$, temos que h^{k+1} se torna:

$$\begin{aligned} h^{k+1}(p) &= p + q \left(h^k(p) \right)^2 \\ &= p + q \left(h \left(h^{k-1}(p) \right) \right)^2 \\ &= p + q \left(p + q \left(h^{k-1}(p) \right)^2 \right)^2 \\ &= p + q \left(p + q \left(p + q \left(h^{k-2}(p) \right)^2 \right)^2 \right)^2 \\ &\vdots \\ &= p + q \left(p + q \left(p + q \left(\dots \left(p + q \left(p + qp^2 \right)^2 \dots \right) \right)^2 \right)^2 \right)^2 \end{aligned}$$

onde há k parcelas $p + q$ e apenas um termo p^2 . ■

Notemos que $\mathbb{P}_1(T = k) = \mathbb{P}_1(T \leq k) - \mathbb{P}_1(T \leq k - 1)$ onde $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, cuja forma exata é obtida pelo Lema 7. Na Figura 4, exibimos o comportamento da função de probabilidade da variável aleatória T . Podemos notar que, a medida que os valores de p crescem, a função de probabilidade (f.p.) de T possui um comportamento decrescente, como era de se esperar, quando p aumenta $\mathbb{P}_1(T = 1)$ se aproxima de um.

Figura 4 – Função de probabilidade da variável aleatória T para $p \in \{0.51, \dots, 0.99\}$. Para cada valor de p , tomamos $k \in \{1, \dots, 20\}$.



Fonte: A autora (2022).

Lema 8. Sejam $p > \frac{1}{2}$ e T a variável aleatória definida em (5.11). Temos

$$\frac{1}{p} \leq \mathbb{E}_1(T) \leq \frac{1}{2p-1}.$$

Prova . Usando Auxiliar 5, Lema 3 e que $\mathbb{P}_1(R_1 = 0) = p$, concluímos a prova. ■

Sabemos por (FARRINGTON; GRANT, 1999) que

$$\mathbb{P}_r(T \leq k) = (\mathbb{P}_1(T \leq k))^r. \quad (5.14)$$

Lema 9. Seja R_t com $R_0 = r$ e $p > \frac{1}{2}$. Logo, $\mathbb{E}_r(T) \geq \frac{1}{p}$.

Prova . Sabemos que

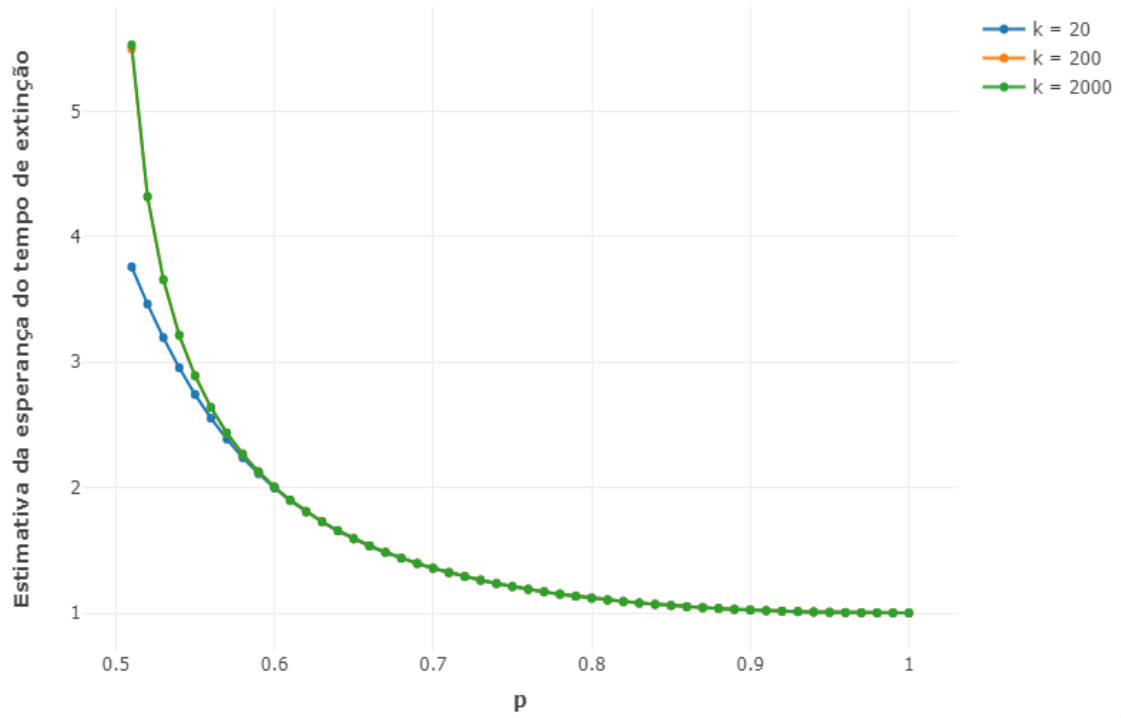
$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_r(T) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_r(T \geq k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_r(T > k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \mathbb{P}_r(T \leq k)) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (1 - (\mathbb{P}_1(T \leq k))^r) \\
 &\geq \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \mathbb{P}_1(T \leq k)) \\
 &= \mathbb{E}_1(T)
 \end{aligned}$$

o qual pelo Lema 8 é limitado inferiormente por $\frac{1}{p}$.

■

Na Figura 5 exibimos o comportamento da esperança do tempo de extinção, $\mathbb{E}_1(T)$, considerando $p \in \{0.51, \dots, 1\}$ e $k \in \{20, 200, 2000\}$. Notamos que a medida que p tende para um, as curvas decrescem se aproximando de um. Além disso, observamos que para $k \in \{200, 2000\}$, as esperanças não apresentam uma diferença significativa.

Figura 5 – Gráfico para a Esperança da variável aleatória T quando $p \in \{0.51, 0.52, \dots, 1\}$. Para cada valor de p tomamos $k \in \{20, 200, 2000\}$.



Fonte: A autora (2023).

6 PROVA DO TEOREMA 4

A partir desta seção, em alguns momentos, para $W \in \text{dic}$, denotaremos $W_t = WP^t$.

Proposição 2. Se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(q_{W_t}(0) = 0) = 1, \forall W \in \text{dic},$$

então P é ergódico.

Prova . Notemos que é suficiente provarmos para palavras, pois, como P agindo em Ω é uma Cadeia de Markov, e como qualquer palavra aleatória X é concentrada em um subconjunto finito de dic, Δ_X , se para cada uma das palavras aleatórias $W \in \Delta_X$ tivermos satisfeita nossa hipótese, então, X , também gozará do fato que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(q_{X_t}(0) = 0) = 1$. Dessa maneira,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(q_{XP^t}(0))}{\mathbb{E}(|XP^t|) + 1 - 1} = 0, \forall X \in \Omega.$$

Logo, dada $\mu \in \mathcal{M}$ arbitrária e qualquer sequência de palavras aleatórias $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $X_n \rightarrow \mu$ temos $\lim_{t \rightarrow \infty} X_n P^t \rightarrow \delta_{1_{\mathbb{Z}}}$.

■

Prova do item T4.1 do Teorema 4. Utilizaremos a Proposição 2. Ou seja, que para cada $W \in \text{dic}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(q_{W_t}(0) = 0) = 1. \quad (6.1)$$

Tomemos a palavra $W \in \text{dic}$ tal que $q_W(0) > 1$, pois o caso $q_W(0) = 0$ é trivial e $q_W(0) = 1$ foi feito no Lema 6. Logo, a seguinte igualdade é válida

$$q_W(0) = q_{V_1}(0) + q_{V_2}(0) + \dots + q_{V_k}(0)$$

onde W é a concatenação das palavras V_1, \dots, V_k , nesta ordem e $q_{V_i}(0) = 1, \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

Podemos notar que

$$\mathbb{P}(q_{W_t}(0) = q_{V_1 P^t}(0) + q_{V_2 P^t}(0) + \dots + q_{V_k P^t}(0)) = 1, \forall t \in \mathbb{N}.$$

A evolução de cada $q_{V_i P^t}(0)$ pode ser associada, por (5.10), a um processo de ramificação R_t^i , onde $R_0^i = 1$. Mas, como $i \neq j$ temos que $q_{V_i P^t}(0)$ é independente de $q_{V_j P^t}(0)$, então R_t^i evolui independente de R_t^j . Logo, dados $q_W(0) > 1$ e $R_0^1 = \dots = R_0^k = 1$, temos $\mathbb{P}(q_{W_t}(0) = R_0^1 + \dots + R_0^k)$. Daí,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{q_W(0)}(q_{W_t}(0) = 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{(1, \dots, 1)}(R_t^1 + \dots + R_t^k = 0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{(1, \dots, 1)}(R_t^1 + \dots + R_t^k = 0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_1(R_t^1 = 0) \dots \mathbb{P}_1(R_t^k = 0) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbb{P}_1(R_t^1 = 0))^k \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

Prova do item T4.2 do Teorema 4. Pelo item T4.1,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P^t = \delta_{1_{\mathbb{Z}}}.$$

Inicialmente, tomemos uma palavra W tal que $q_W(0) > 0$, pois o caso em que $q_W(0) = 0$ é trivial. Observemos que W pode ser escrito como uma concatenação das palavras V_1, \dots, V_k com $k \leq |W|$ e $q_{V_i}(0) = 1$. Logo,

$$q_W(0) = q_{V_1}(0) + q_{V_2}(0) + \dots + q_{V_k}(0). \quad (6.2)$$

Como vimos em (5.10), $q_{V_i^t}(0)$ pode ser associado a R_t com $R_0 = 1$. Como para cada $q_{V_i}(0)$ a evolução ocorre de modo independente, $q_W(0)$ pode ser associado com R_t sendo $R_0 = q_W(0)$. Primeiramente mostraremos o caso em que $p = \frac{1}{2}$, pelo Lema 5,

$$\mathbb{E}(q_{W_t}(0)) = \mathbb{E}_{q_W(0)}(R_t) = q_W(0).$$

Logo, para t_W definido em (2.1), temos $\mathbb{E}(t_W) = \infty$ para cada $W \in \text{dic}$ com $q_W(0) > 0$. Observando que cada palavra aleatória é concentrada em um subconjunto finito de dic e P é uma Cadeia de Markov, concluímos que $\mathbb{E}(t_{X_n}) = \infty$, em que $X_n \rightarrow \mu$ e existe ao menos um n tal que $\mathbb{P}(q_{X_n}(0) > 0) = 1$.

Agora, vejamos para $p > \frac{1}{2}$. Usando a relação entre $q_{W_t}(0)$ e R_t com $R_0 = q_W(0)$,

$$\mathbb{E}(q_{W_t}(0)) = \mathbb{E}_{q_W(0)}(R_t). \quad (6.3)$$

Agora, para t_W definido em (2.1), segue

$$\mathbb{E}(t_W) = \mathbb{E}_{q_W(0)}(T).$$

Pelo Lema 9, $\mathbb{E}_{q_W(0)}(T) > \frac{1}{p}$. Por outro lado,

$$\mathbb{E}_{q_W(0)}(T) \leq \sum_{i=1}^{q_W(0)} \mathbb{E}_1(T). \quad (6.4)$$

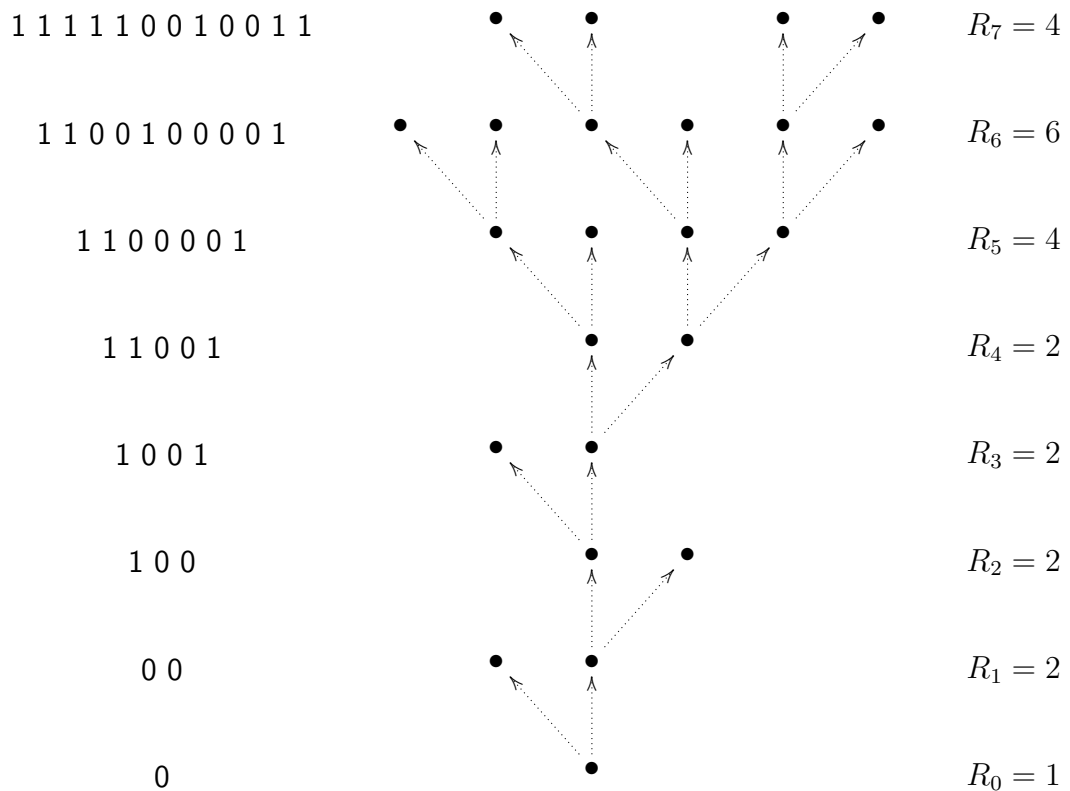
E pelo Lema Auxiliar 5, o lado esquerdo da expressão acima é finito.

■

7 PROVA DO TEOREMA 5

Na Figura 6 do lado esquerdo temos uma possível evolução da palavra $W = 0$, que ocorre com probabilidade positiva. No diagrama do meio, apresentamos a correspondente evolução no processo de ramificação. E do lado direito, o número de descendentes de cada geração no passo t .

Figura 6 – Uma possível evolução da palavra $W = 0$ e a correspondente evolução do processo de Ramificação.



Fonte: A autora (2023).

A intuição para o resultado descrito no Lema 10 é ilustrado na Figura 6.

Lema 10. Seja $W = 0$. Logo,

$$\mathbb{P}\left(|W_t| = R_0 + \frac{1}{2}(R_1 + R_2 + \dots + R_t)\right) \tag{7.1}$$

em que $(R_t)_{t \geq 0}$ com $R_0 = 1$ é o processo de ramificação definido em (5.1).

Prova . Prova por indução em t .

Notemos que $W_1 \in \{1, 00\}$. Daí, $|W_1| \in \{1, 2\}$. Além disso,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(R_0 + \frac{R_1}{2} = 1\right) &= \mathbb{P}\left(R_1 = 0 \mid R_0 = 1\right) = \mathbb{P}(|W_1| = 1) = p. \\ \mathbb{P}\left(R_0 + \frac{R_1}{2} = 2\right) &= \mathbb{P}\left(R_1 = 1 \mid R_0 = 1\right) = \mathbb{P}(|W_1| = 2) = 1 - p.\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbb{P}\left(R_0 + \frac{R_1}{2} = |W_1|\right) = 1.$$

Nosso passo de indução é

$$\mathbb{P}\left(|W_t| = R_0 + \frac{1}{2}(R_1 + R_2 + \dots + R_t)\right) = 1. \quad (7.2)$$

Vemos que $\mathbb{P}\left(|W_{t+1}| = \mathbf{q}_{W_{t+1}}(0) + \mathbf{q}_{W_{t+1}}(1)\right) = 1$,

$$\mathbf{q}_{W_{t+1}}(0) = \mathbf{q}_{W_t}(0) - \mathbf{B}_1 + \frac{\mathbf{B}_2}{2} \text{ e } \mathbf{q}_{W_{t+1}}(1) = \mathbf{q}_{W_t}(1) + \mathbf{B}_1,$$

em que $\mathbf{B}_1 \sim \text{Bin}(\mathbf{q}_{W_t}(0), p)$ e $\frac{\mathbf{B}_2}{2} \sim \text{Bin}(\mathbf{q}_{W_t}(0), 1 - p)$. Assim,

$$\mathbb{P}\left(|W_{t+1}| = \mathbf{q}_{W_t}(0) + \mathbf{q}_{W_t}(1) + \frac{\mathbf{B}_2}{2}\right) = \mathbb{P}\left(|W_{t+1}| = |W_t| + \frac{\mathbf{B}_2}{2}\right)$$

Usando (7.2), temos

$$\mathbb{P}\left(|W_{t+1}| = R_0 + \frac{1}{2}(R_1 + \dots + R_t) + \frac{\mathbf{B}_2}{2}\right) = \mathbb{P}\left(|W_{t+1}| = R_0 + \frac{1}{2}\left(R_1 + \dots + R_t + \frac{\mathbf{B}_2}{2}\right)\right).$$

Notemos que $\mathbb{P}(\mathbf{B}_2 = R_{t+1}) = 1$. Daí, segue o resultado. ■

Lema 11. Seja $W = 0$ e $p < \frac{1}{2}$, logo $\lim_{t \rightarrow \infty} d_{W_t}(0) = f(p)$.

Prova . Pelo exposto em (6.3), $\mathbb{E}(\mathbf{q}_{W_t}(0)) = \mathbb{E}_1(R_t)$, a qual pelo Lema 3 é dada por $(2(1-p))^t$.

Por outro lado, usando o Lema 10,

$$\mathbb{P}\left(|W_t| = R_0 + \frac{1}{2}(R_1 + R_2 + \dots + R_t)\right) = 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|W_t|) &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^t \mathbb{E}_1(R_l) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^t (2(1-p))^l \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left[(2(1-p)) \left(\frac{1 - (2(1-p))^t}{2p-1} \right) \right].\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{W_t}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(\mathfrak{q}_{W_t}(0))}{\mathbb{E}(|W_t|)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(2p-1)(2-2p)^t}{p - (1-p)(2-2p)^t} = f(p).$$

Note que $\mathbb{E}(|W_t| | W = 0)$, ou seja, o tamanho médio do comprimento da palavra aleatória W_t onde W é zero, pode ser calculada explicitamente. Aqui, denotaremos essa quantidade por

$$\phi_t = 1 + \frac{2(1-p)}{2} \frac{1 - (2(1-p))^t}{2p-1}. \quad (7.3)$$

Lema 12. Seja $W \in \text{dic}$ tal que $\mathfrak{q}_W(0) > 1$ e $p < \frac{1}{2}$. Logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{W_t}(0) = f(p).$$

Prova . Para $i = 1, 2, \dots, \mathfrak{q}_W(0)$ e sejam $(R_t^1)_{t \in \mathbb{N}}, \dots, (R_t^{\mathfrak{q}_W(0)})_{t \in \mathbb{N}}$ processos de ramificação independentes, onde $R_0^i = 1$ para todo i . Logo, usando o Lema 10

$$\mathbb{P}\left(\mathfrak{q}_{W_t}(0) = \sum_{l=1}^{\mathfrak{q}_W(0)} R_t^l \mid R_0^1 = \dots = R_0^{\mathfrak{q}_W(0)} = 1\right) = 1.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathfrak{q}_{W_t}(0)) &= \sum_{l=1}^{\mathfrak{q}_W(0)} \mathbb{E}_1(R_t^l) \\ &= \mathfrak{q}_W(0) \mathbb{E}_1(R_t^1) \\ &= \mathfrak{q}_W(0) (2(1-p))^t. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|W_t|) &= \mathfrak{q}_W(1) + \sum_{l=1}^{\mathfrak{q}_W(0)} \mathbb{E}_1\left(R_0^l + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t R_i^l\right) \\ &= \mathfrak{q}_W(1) + \mathfrak{q}_W(0) + \mathfrak{q}_W(0) \frac{2(1-p)}{2} \left[\frac{1 - (2(1-p))^t}{2p-1} \right]. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Assim, de (7.3), (7.4) e (7.5), segue que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} d_{W_t}(0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{q}_W(0) (2(1-p))^t}{\mathfrak{q}_W(1) + \mathfrak{q}_W(0) \phi_t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2(2p-1) \mathfrak{q}_W(0) (2(1-p))^t}{\mathfrak{q}_W(1) 2(2p-1) + \mathfrak{q}_W(0) (2(2p-1) + 2(1-p) [1 - (2(1-p))^t])} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2(2p-1) \mathfrak{q}_W(0)}{\frac{\mathfrak{q}_W(1) 2(2p-1)}{(2(1-p))^t} + \mathfrak{q}_W(0) \left(\frac{2(2p-1)}{(2(1-p))^t} + \frac{1}{(2(1-p))^t} - 2(1-p) \right)} \\ &= f(p). \end{aligned}$$

■

Dos Lemas 11 e 12, notamos que para $W \in \text{dic}$, o limite de $d_{W_t}(0)$ quando t tende para o infinito, independe de $q_W(0)$ quando esse é positivo.

Lema 13. Seja X palavra aleatória e $\Delta_X = \{W_1, \dots, W_n\}$ onde $q_{W_i}(0) = 0, \forall i = 1, \dots, n$. Logo, $d_{X^{P^t}}(0) = 0$, para cada valor de t .

Prova . Notemos que para $W_l \in \Delta_X$, temos

$$\mathbb{E}(q_{W_l^{P^t}}(0)) = \mathbb{E}_0(R_t) = 0. \quad (7.6)$$

Além disso, usando (7.6)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(q_{X^{P^t}}(0)) &= \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(q_{X^{P^t}}(0) | X = W_l) \mathbb{P}(X = W_l) \\ &= \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(q_{W_l^{P^t}}(0)) \mathbb{P}(X = W_l) \\ &= \sum_{l=1}^n \mathbb{E}_0(R_t) \mathbb{P}(X = W_l) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daí, concluímos que $d_{X^{P^t}}(0) = 0$.

■

Lema 14. Seja X palavra aleatória e $\Delta_X = \{W_1, \dots, W_n\}$, onde $q_{W_i}(0) > 0, \forall i = 1, \dots, n$.

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{X^{P^t}}(0) = f(p).$$

Prova . Consideremos a seguinte cadeia de igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{q}_{XP^t}(0)) &= \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(\mathbf{q}_{XP^t}(0) | X = W_l) \mathbb{P}(X = W_l) \\
&= \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(\mathbf{q}_{W_l P^t}(0)) \mathbb{P}(X = W_l) \\
&= \sum_{l=1}^n \mathbb{E}_{\mathbf{q}_{W_l}(0)}(R_t) \mathbb{P}(X = W_l) \\
&= \sum_{l=1}^n \mathbf{q}_{W_l}(0) (2(1-p))^t \mathbb{P}(X = W_l) \\
&= (2(1-p))^t \sum_{l=1}^n \mathbf{q}_{W_l}(0) \mathbb{P}(X = W_l). \tag{7.7}
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando ϕ_t definido em (7.3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|XP^t|) &= \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(|XP^t| | X = W_l) \mathbb{P}(X = W_l) \\
&= \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(|W_l P^t|) \mathbb{P}(X = W_l) \\
&= \sum_{l=1}^n (\mathbf{q}_{W_l}(1) + \mathbf{q}_{W_l}(0) \phi_t) \mathbb{P}(X = W_l) \\
&= \phi_t \sum_{l=1}^n \left(\frac{\mathbf{q}_{W_l}(1)}{\phi_t} + \mathbf{q}_{W_l}(0) \right) \mathbb{P}(X = W_l). \tag{7.8}
\end{aligned}$$

Como $\phi_t \rightarrow \infty$ com $t \rightarrow \infty$ temos de (7.7) e (7.8)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(\mathbf{q}_{XP^t}(0))}{\mathbb{E}(|XP^t|)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(2(1-p))^t}{\phi_t} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{l=1}^n \mathbf{q}_{W_l}(0) \mathbb{P}(X = W_l)}{\sum_{l=1}^n \left(\frac{\mathbf{q}_{W_l}(1)}{\phi_t} + \mathbf{q}_{W_l}(0) \right) \mathbb{P}(X = W_l)} = f(p).$$

■

Lema 15. Seja X uma palavra aleatória tal que $\mathbb{P}(\mathbf{q}_X(0) = 0) \in (0, 1)$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{XP^t}(0) = f(p).$$

Prova . Os casos em que $\mathbb{P}(\mathbf{q}_X(0) = 0) = 1$ e $\mathbb{P}(\mathbf{q}_X(0) > 0) = 1$ foram vistos nos Lemas 13 e 14, respectivamente. Assim, vejamos o caso em que $\mathbb{P}(\mathbf{q}_X(0) = 0) \in (0, 1)$. Podemos tomar a seguinte partição para Δ_X , a saber Δ_+ e Δ_- . Se $W \in \Delta_+$, então $\mathbf{q}_W(0) > 0$ e se

$W \in \Delta_-$, então $q_W(0) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(q_{XP^t}(0)) &= \sum_{W \in \Delta_+} \mathbb{E}(q_{XP^t}(0) | X = W) \mathbb{P}(X = W) + \sum_{W \in \Delta_-} \mathbb{E}(q_{XP^t}(0) | X = W) \mathbb{P}(X = W) \\
&= \sum_{W \in \Delta_+} \mathbb{E}(q_{W_t}(0)) \mathbb{P}(X = W) + \sum_{W \in \Delta_-} \mathbb{E}(q_{W_t}(0)) \mathbb{P}(X = W) \\
&= \sum_{W \in \Delta_+} \mathbb{E}_{q_W(0)}(R_t) \mathbb{P}(X = W) + \sum_{W \in \Delta_-} \mathbb{E}_{q_W(0)}(R_t) \mathbb{P}(X = W) \\
&= \sum_{W \in \Delta_+} q_W(0) (2(1-p))^t \mathbb{P}(X = W) \\
&= (2(1-p))^t \sum_{W \in \Delta_+} q_W(0) \mathbb{P}(X = W).
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Agora, vejamos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|XP^t|) &= \sum_{W \in \Delta_+} \mathbb{E}(|W_t|) \mathbb{P}(X = W) + \sum_{W \in \Delta_-} \mathbb{E}(|W_t|) \mathbb{P}(X = W) \\
&= \sum_{W \in \Delta_+} \mathbb{E}(|W_t|) \mathbb{P}(X = W) + \sum_{W \in \Delta_-} |W| \mathbb{P}(X = W).
\end{aligned}$$

Por (7.5) do Lema 13,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|XP^t|) &= \sum_{W \in \Delta_+} (q_W(1) + q_W(0)\phi_t) \mathbb{P}(X = W) \\
&\quad + \sum_{W \in \Delta_-} |W| \mathbb{P}(X = W).
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Daí, usando (7.9) e (7.10)

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(q_{XP^t}(0))}{\mathbb{E}(|XP^t|)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(2(1-p))^t \sum_{W \in \Delta_+} q_W(0) \mathbb{P}(X = W)}{\phi_t \sum_{W \in \Delta_+} \left(\frac{q_W(1)}{\phi_t} + q_W(0) \right) \mathbb{P}(X = W) + \sum_{W \in \Delta_-} |W| \mathbb{P}(X = W)} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(2(1-p))^t}{\phi_t} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{W \in \Delta_+} q_W(0) \mathbb{P}(X = W)}{\sum_{W \in \Delta_+} \left(\frac{q_W(1)}{\phi_t} + q_W(0) \right) \mathbb{P}(X = W) + \sum_{W \in \Delta_-} \frac{|W|}{\phi_t} \mathbb{P}(X = W)} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(2(1-p))^t}{\phi_t} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{W \in \Delta_+} q_W(0) \mathbb{P}(X = W)}{\sum_{W \in \Delta_+} \left(\frac{q_W(1)}{\phi_t} + q_W(0) \right) \mathbb{P}(X = W) + \sum_{W \in \Delta_-} \frac{q_W(1)}{\phi_t} \mathbb{P}(X = W)} \\
&= f(p).
\end{aligned}$$

■

Prova do Teorema 5. Pela Proposição 1, se $\mu \in \mathcal{M}$, temos

$$\mu P(0) = \frac{2(1-p)\mu(0)}{1 + (1-p)\mu(0)}.$$

Logo, se $\mu = \delta_{1_{\mathbb{Z}}}$, temos que $\delta_{1_{\mathbb{Z}}}P(0) = 0$ implicando que $\delta_{1_{\mathbb{Z}}}$ é sempre uma distribuição invariante para P . Isto ocorre para qualquer $p \in [0, 1]$. Assim, assumiremos $\mu \in \mathcal{M} \setminus \{\delta_{1_{\mathbb{Z}}}\}$ e $p < \frac{1}{2}$. Desse modo, temos que $\mu(0) > 0$. Além disso, se há uma sequência de palavras aleatórias $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $X_n \rightarrow \mu$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |d_{X_n}(0) - \mu(0)| = 0.$$

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(q_{X_n}(0))}{\mathbb{E}(|X_n|)} = \mu(0) > 0. \quad (7.11)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n| > r)$ para cada valor real positivo, r . Segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n|) = \infty$. Logo, para que (7.11) seja satisfeita, é necessário que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(q_{X_n}(0)) = \infty$, implicando que para cada $r \in \mathbb{R}_+$, tenhamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(q_{X_n}(0) > r) > 0.$$

Isto é, dado valor $r \in \mathbb{R}_+$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica

$$\mathbb{P}(q_{X_n}(0) > r) > 0. \quad (7.12)$$

Além disso, para $r_1 > r$ temos

$$\mathbb{P}(q_{X_n}(0) > r) \geq \mathbb{P}(q_{X_n}(0) > r_1).$$

Daí, para cada $r \in \mathbb{R}_+$, $n > n_0$ e (7.12)

$$\mathbb{P}(q_{X_n}(0) > 0) \geq \mathbb{P}(q_{X_n}(0) > r) > 0.$$

Portanto, pelos Lemas 11 - 15,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{X_n P^t}(0) = f(p).$$

Assim, temos que a distribuição inicial não tende para $\delta_{1_{\mathbb{Z}}}$. Logo P não é ergódico. ■

8 SIMULAÇÃO

Desde o advento do primeiro computador digital na década de 40 o uso de modelagem computacional de fenômenos físicos, químicos e biológicos tem crescido significativamente. Em particular, na matemática aplicada, as simulações computacionais podem direcionar melhor o esforço em algumas pesquisas. Nesta seção, essa ferramenta vai nos auxiliar a observar melhor o que ocorre na evolução de nosso processo. Seja $N \in \mathbb{N}$ e $\bigcup_{k=0}^N \{0, 1\}^k$, isto é, todas as palavras de comprimento menor ou igual a N .

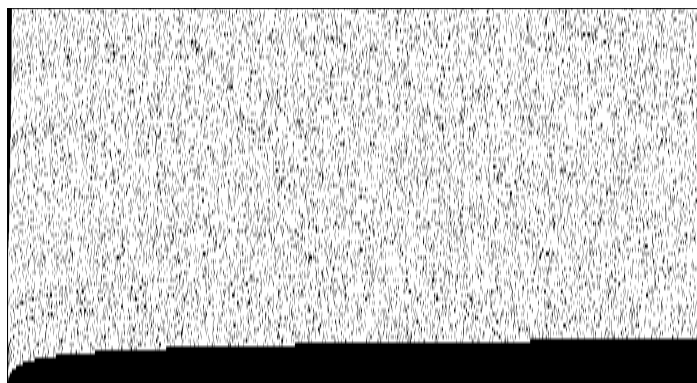
Em todos os nossos experimentos, tomaremos a palavra inicial, $W = w_0w_1 \cdots w_{1999}$, onde $w_0 = 0$ e $w_1 = \dots = w_{1999} = 1$. Os valores de p serão 0.1, 0.5 e 0.9. Fixado p , obteremos $W_0, W_1, W_2, \dots, W_{100}$, ou seja, teremos $(W_t)_{t \in \{0, \dots, 100\}}$. Nos gráficos que exibem a evolução do processo (Figuras 7 e 8) tomamos o eixo vertical correspondendo ao tempo t , e o eixo horizontal correspondendo ao estado da letra na posição $i \in \{0, \dots, |W_t|\}$. Evidentemente, no processo teremos

$$\mathbb{P}(|W_t| \leq |W_{t+1}|) = 1.$$

Para facilitar a visualização da evolução temporal do processo, fixamos no eixo horizontal $i \in \{0, \dots, 1999\}$. A letra zero é associada a cor branca e a letra um é associada a cor preta.

Na Figura 7, onde $p = 0.1$, temos um resultado proveniente desta simulação, a evolução temporal do processo é indicada pelo eixo vertical, ela ocorre no sentido norte para sul.

Figura 7 – Evolução da palavra W com probabilidade $p = 0.1$, considerando 2000 partículas, e considerando a 200 repetições.



Fonte: A autora(2023).

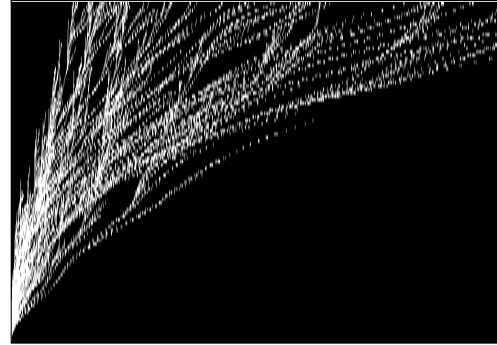
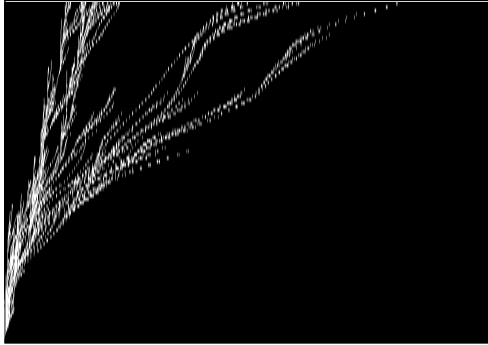
Em nosso próximo experimento, fixamos $p \in \{0.5, 0.9\}$ e repetimos, de forma independente, o nosso experimento padrão (evolução temporal de $(W_t)_{t \in \{0, \dots, 100\}}$) L vezes. Todas as

letras no estado zero que foram obtidas permaneceram, sendo estas colocadas em uma única representação (ver Figura 8 e 9). Ou seja, se na posição i em algum dos L experimentos independentes, obteve o valor zero. Este valor zero será representado. Na Figura 8 mostramos o resultado com $p = 0.5$ e $L \in \{100, 200, \dots, 1000\}$.

Figura 8 – Evolução da palavra W com probabilidade $p = 0.5$, considerando 2000 partículas.

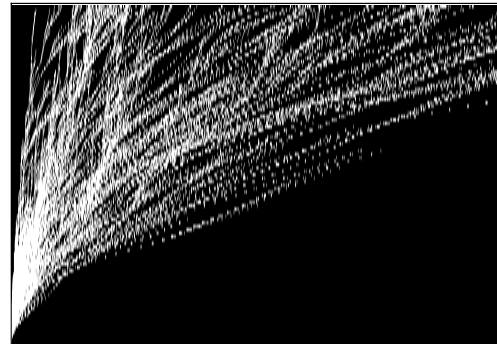
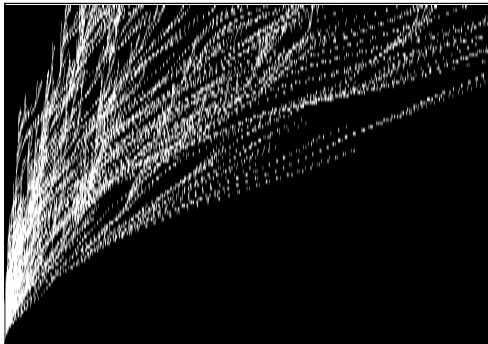
(a) Evolução da palavra W com $L = 100$.

(b) Evolução da palavra W com $L = 200$.



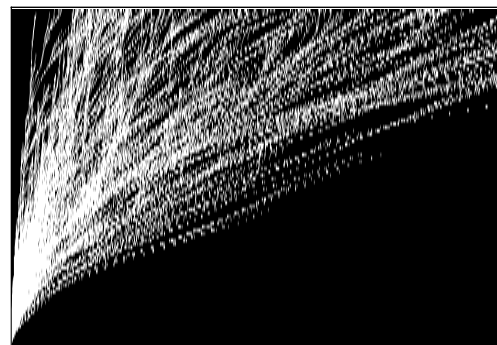
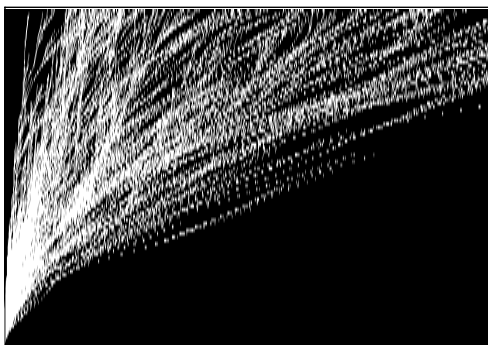
(c) Evolução da palavra W com $L = 300$.

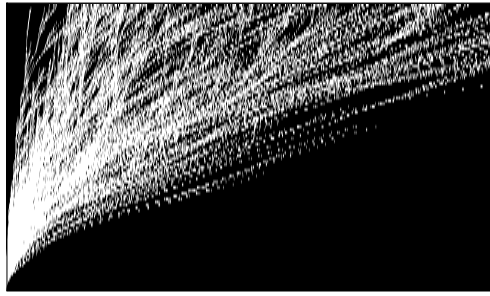
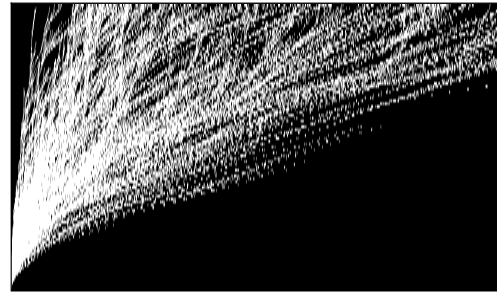
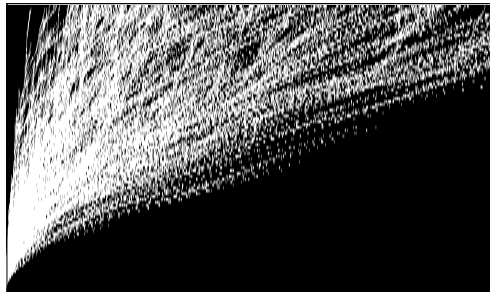
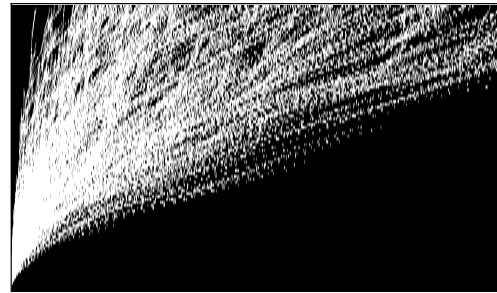
(d) Evolução da palavra W com $L = 400$.



(e) Evolução da palavra W com $L = 500$.

(f) Evolução da palavra W com $L = 600$.



(g) Evolução da palavra W com $L = 700$.(h) Evolução da palavra W com $L = 800$.(i) Evolução da palavra W com $L = 900$.(j) Evolução da palavra W com $L = 1000$.

Fonte: A autora (2023).

Para $p = 0.9$, mesmo com $L = 1000$, exibimos na Figura 9 que somente 5 letras permaneceram no estado zero, sugerindo que o processo converge para sua estabilidade $q_{W_t}(0) = 0$ muito rápido.

Figura 9 – Evolução da palavra W com probabilidade $p = 0.9$, visualizando as 5 primeiras letras e considerando $L = 1000$.



Fonte: A autora (2023).

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação apresentamos o modelo de expansão-modificação e a formalização matemática utilizando operadores de substituição para o caso particular em que consideramos apenas uma palavra sofrendo a ação do operador P . Além disso, demonstramos as suas principais propriedades: consistência, comportamento assintótico de μP^t quando $p \in [0, 1]$, ergodicidade e não ergodicidade.

Embora tenhamos provado a existência de dois tipos de transição de fase, a saber: no primeiro caso, mesmo o processo sendo ergódico, mostramos que há uma mudança na "velocidade média" que o processo leva para atingir a única distribuição invariante. No outro caso, o que é mais comumente analisado, verificamos que há o comportamento de ergodicidade e não ergodicidade. No regime de não ergodicidade, verificamos que se $\mu \neq \delta_{1_{\mathbb{Z}}}$, então $\mu P^t(0) > 0$, para todo $t \in \mathbb{N}$. Contudo, é necessário questionar se há uma distribuição invariante distinta de $\delta_{1_{\mathbb{Z}}}$ para $p < \frac{1}{2}$. Havendo, classificar a mesma, por exemplo, se ela é Gibbs, quase Gibbs.

Apresentamos ainda, um processo de ramificação, R_t , e suas propriedades, considerando inicialmente apenas um ancestral e posteriormente as estendemos para quando possuímos i ancestrais. Também expomos uma expressão recorrente para a distribuição da variável aleatória correspondente ao tempo de extinção do nosso processo, em função da sua função geratriz ordinária. E analisamos seu comportamento através de simulações, considerando valores de probabilidade e composição distintos.

Ainda que nosso processo não se enquadre diretamente na formalização apresentada por (TOOM et al., 2011), onde cada operação ocorre em tempos distintos, fomos capazes de utilizar essa teoria. Acreditamos, assim como mencionado na literatura, que seja possível apresentar uma formalização mais geral, onde várias operações ocorram simultaneamente.

No ponto de vista de aplicação, diferente dos processos de partículas interagentes tradicionalmente estudado, onde quando deseja-se estimar algum parâmetro é feita a aproximação de campo médio e nessa aproximação é onde se faz tal estimativa do parâmetro. Aqui, nosso operador atua em palavras aleatórias como uma Cadeia de Markov. Logo, podemos utilizar a teoria já bem estabelecida de inferência para Cadeia de Markov para estimar nossos parâmetros, o que acreditamos ser mais realístico.

REFERÊNCIAS

- ATHREYA, K. B.; NEY, P. E. Branching processes. Springer - Verlag, v. 196, 1972.
- BROWN, T. A. Genomes. Garland Science, v. 2, 2002.
- CHASSAING, P.; MAIRESSE, J. A non-ergodic probabilistic cellular automaton with a unique invariant measure. *Stochastic Processes and their Applications*, v. 121, n. 11, p. 2474–2487, 2011.
- FARRINGTON, C. P.; GRANT, A. D. The distribution of time to extinction in subcritical branching processes: applications to outbreaks of infectious disease. *Journal of Applied Probability*, Cambridge University Press, v. 36, n. 3, p. 771–779, 1999.
- FERRARI, P. A.; GALVES, A. Construction of stochastic processes, coupling and regeneration. In: *XIII Escuela Venezolana de Matemática*. [S.l.: s.n.], 2000.
- FIGUEREIDO, L. M. Matemática discreta. Fundação CECIERJ, v. 2, 2010.
- FLORESCU, I. *Probability and Stochastic Processes*. [S.l.]: Wiley, 2014.
- LI, W. Spatial $\frac{1}{f}$ Spectra in Open Dynamical Systems. *Europhysics Letters*, v. 10, n. 5, p. 395–400, 1989.
- LI, W. Generation non-trivial long-range correlations and $1/f$ spectra by replication and mutation. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, World Scientific, v. 02, n. 01, p. 137–154, 1991.
- LI, W.; MARR, T. G.; KANEKO, K. Understanding Long-Range Correlations in DNA sequences. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 75, n. 1, p. 392–416, 1994.
- LIGGETT, T. M. *Interacting Particle Systems*. [S.l.]: Springer Berlin, Heidelberg, 1985.
- MANSILLA, R.; COCHO, G. Multiscaling in expansion-modification systems: An explanation for long range correlation in dna. *Complex Systems*, Complex Systems Publications, v. 12, p. 207 – 140, 2000.
- PETROV, A. I.; KARPELEVICH, F. I.; MALYSHEV, V. A.; PIROGOV, S. A.; RYBKO, A. N. Context free evolution of words. [research report]. INRIA, 2002.
- PRAY, L. A. DNA replication and causes of mutation. *Nature Education*, Nature Publishing Group, v. 1, n. 1, p. 214, 2008.
- ROCHA, A.; SIMAS, A.; TOOM, A. Substitution Operators. *Journal of Statistical Physics*, v. 143, p. 585–618, 2011.
- SALGADO-GARCÍA, R.; UGALDE, E. Exact scaling in the expansion-modification system. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 153, p. 842–863, 2013.
- SETHNA, J. P. *Statistical Mechanics: Entropy, Order Parameters, and Complexity*. 2. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2021.
- TOKMAKOFF, A. *Lecture notes in Time-Dependent Quantum Mechanics and Spectroscopy: Time-correlation functions*. 2008.

TOOM, A.; RAMOS, A.; ROCHA, A. V.; SIMAS, A. Random Processes with Variable Length. In: *28-o Colóquio Brasileiro de Matemática*. [S.l.]: IMPA, 2011.

YU, J.; PEI, J. Extinction of branching processes in varying environments. *Statistics and Probability Letters*, Elsevier, v. 79, p. 1872 –1877, 2009.

APÊNDICE A – ALGUNS RESULTADOS SOBRE PROCESSO DE RAMIFICAÇÃO

Os resultados descritos neste apêndice são baseado em (ATHREYA; NEY, 1972), seja $\mathcal{R} = (R_t)_{t \in \mathbb{N}}$ um processo de ramificação e para $\mathbb{P}(R_0 = 1) = 1$,

$$\mathbb{E}_1(R_1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(R_1 = k | R_0 = 1). \quad (\text{A.1})$$

Temos que $\mathbb{P}(R_1 = k | R_0 = 1)$ será escrito como $\mathbb{P}_1(R_1 = k)$.

A quantidade (A.1) é conhecida por número médio de descendentes produzidos por um único ancestral (pai ou mãe). Seja

$$h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(R_1 = k) s^k, \quad \text{com } |s| \leq 1 \text{ onde } s \in \mathbb{R}$$

a função geradora de probabilidade, a qual pode ser interpretada como sendo referente ao número de descendentes de um dado ancestral. Além disso, definimos suas iteradas,

$$h_0(s) = s, \quad h_1(s) = h(s), \dots, \quad h_{n+1}(s) = h(h_n(s)).$$

Para $0 < \mathbb{P}_1(R_1 = 0) < 1$, pode ser provado:

- h é estritamente convexa e crescente em $[0,1]$;
- $h(0) = p_0$ e $h(1) = 1$;
- se $\mathbb{E}(R_1) \leq 1$, então $h(s) > s$ para $s \in [0, 1)$;
- se $\mathbb{E}(R_1) \geq 1$, então $h(s) = s$ tem única raiz em $[0,1)$.

Seja d a menor de todas as raízes de $h(s) = s$ para $s \in [0, 1]$. Logo, os resultados anteriores nos dão:

Auxiliar 1.

- Se $\mathbb{E}_1(R_1) \leq 1$, então $d = 1$;
- se $\mathbb{E}_1(R_1) > 1$, então $d < 1$.

Além disso, temos:

Auxiliar 2.

- Se $s \in [0, d)$, então $h_1(s) < h_2(s) < h_3 < \dots$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(s) = d$;
- Se $s \in (d, 1)$, então $h_1(s) > h_2(s) > h_3 > \dots$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(s) = d$;
- Se $s \in \{d, 1\}$, então $h_n(s) = s, \forall n$.

O valor d é a probabilidade de absorção de \mathcal{R} . Logo, se $\mathbb{P}_1(R_1 = 0) \in (0, 1)$, e $0 < \mathbb{E}_1(R_1) \leq 1$ temos, pelo Lema Auxiliar 1 e 2, que a probabilidade de absorção é um.

Auxiliar 3. Seja \mathcal{R} nosso processo de ramificação, onde $R_0 = 1$ e $\mathbb{E}_1(R_1)$ é finita. Temos que:

- $\mathbb{E}_1(R_t) = m^t$
- $Var_1(R_t) = \begin{cases} \frac{\sigma^2 m^{t-1}(m^t - 1)}{m - 1}, & \text{se } m \neq 1; \\ t\sigma^2, & \text{se } m = 1. \end{cases}$

Onde $\sigma^2 = Var_1(R_1)$ e $m = \mathbb{E}_1(R_1)$.

Auxiliar 4. Se $\mathbb{E}_1(R_1) = 1$ e $Var_1(R_1)$ é finita, então quando n tende ao infinito, temos $\mathbb{P}_1(R_t > 0) \sim \frac{2}{tVar_1(R_1)}$.

Seja $T = \inf\{t \geq 0 : R_t = 0\}$ a variável aleatória que descreve o número total de nascimentos até o momento da extinção. Ver (YU; PEI, 2009)

Auxiliar 5. Dado que $R_0 = 1$, temos:

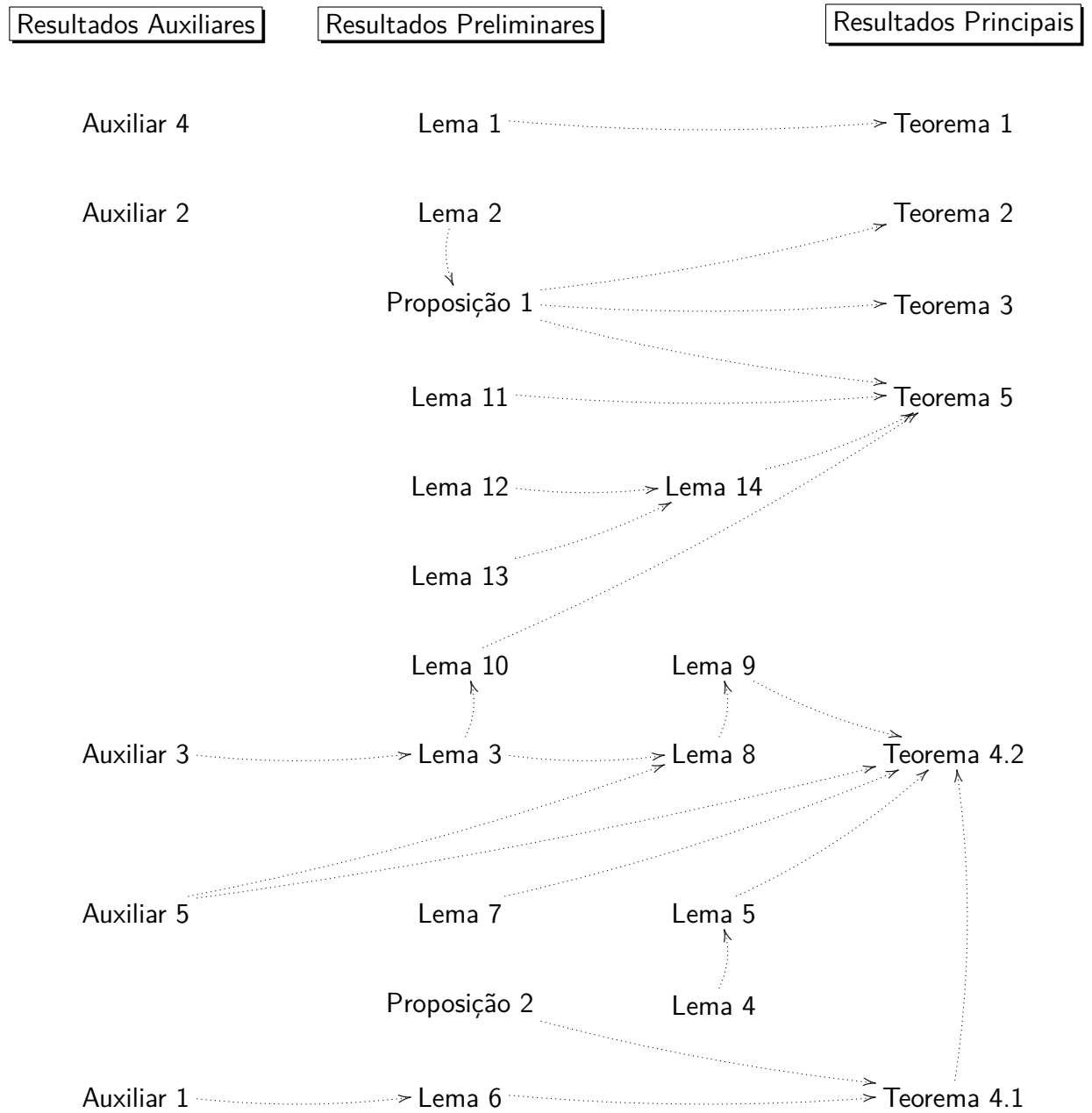
$$\mathbb{E}(T) \text{ é } \begin{cases} \text{finita, se } \mathbb{E}_1(R_1) < 1; \\ \text{infinita, se } \mathbb{E}_1(R_1) \geq 1. \end{cases}$$

Além disso, se $\mathbb{P}_1(R_1 = 0) > 0$, então

$$\frac{1}{\mathbb{P}_1(R_1 = 0)} \leq \mathbb{E}(T) \leq \frac{1}{1 - \mathbb{E}_1(R_1)}.$$

APÊNDICE B – MAPAS MENTAIS

B.1 ESQUEMA DE RESULTADOS



B.2 ESQUEMA DE DEFINIÇÕES

